9 класс — Комплексные числа — 5 — 16 февраля 2017

1. На сторонах выпуклого четырёхугольника вовне построили квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры квадратов, построенных на противоположных сторонах, равны по длине и перпендикулярны.

2. Точки A и B симметричны относительно центра окружности ω. Докажите, что для любой точки $M \in \omega$ значение суммы $MA^2 + MB^2$ постоянно.

3. В окружность вписан четырёхугольник. Касательные к окружности в концах одной диагонали пересекаются на другой диагонали, либо параллельны ей. Докажите, что касательные в концах другой диагонали пересекаются на первой диагонали, либо параллельны ей.

4. На окружности даны 6 точек. Разобьём их на две тройки произвольным образом. Обе эти тройки точек образуют треугольник. Проведём прямую через ортоцентры этих двух треугольников. Докажите, что эта прямая проходит через фиксированную точку вне зависимости от разбиения на тройки.

5. На сторонах треугольника ABC вовне построены равносторонние треугольники. Докажите, что их центры образуют равносторонний треугольник.

6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Из A опускаются перпендикуляры на стороны, её не содержащие: BC и CD, и через их основания проводится прямая l_a. Аналогично определяются прямые l_b, l_c и l_d. Докажите, что все они пересекаются в одной точке.

7. Из основания A_1 биссектрисы AA_1 неравнобедренного треугольника ABC провели вторую касательную ко вписанной окружности, точку касания обозначили K_A. Аналогично строятся точки K_B и K_C. Докажите, что прямые, соединяющие K_A, K_B, K_C с серединами соответствующих сторон треугольника, пересекаются в точке, лежащей на вписанной в треугольник окружности.

8. На плоскости даны вписанный четырёхугольник $ABCD$ и точка X. Точки X_{AB}, X_{AC}, X_{AD}, X_{BC}, X_{BD}, X_{CD} — проекции точки X на прямые AB, AC, AD, BC, BD, CD соответственно. Докажите, что середины отрезков $X_{AB}X_{CD}$, $X_{AC}X_{BD}$, $X_{AD}X_{BC}$ лежат на одной прямой.

9. В треугольнике ABC O — центр описанной окружности. Прямая a проходит через середину высоты треугольника, опущенной из вершины A, и параллельна OA. Аналогично определяются прямые b и c. Докажите, что три эти прямые пересекаются в одной точке.

9 класс — Комплексные числа — 5 — 16 февраля 2017

1. На сторонах выпуклого четырёхугольника вовне построили квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры квадратов, построенных на противоположных сторонах, равны по длине и перпендикулярны.

2. Точки A и B симметричны относительно центра окружности ω. Докажите, что для любой точки $M \in \omega$ значение суммы $MA^2 + MB^2$ постоянно.

3. В окружность вписан четырёхугольник. Касательные к окружности в концах одной диагонали пересекаются на другой диагонали, либо параллельны ей. Докажите, что касательные в концах другой диагонали пересекаются на первой диагонали, либо параллельны ей.

4. На окружности даны 6 точек. Разобьём их на две тройки произвольным образом. Обе эти тройки точек образуют треугольник. Проведём прямую через ортоцентры этих двух треугольников. Докажите, что эта прямая проходит через фиксированную точку вне зависимости от разбиения на тройки.

5. На сторонах треугольника ABC вовне построены равносторонние треугольники. Докажите, что их центры образуют равносторонний треугольник.

6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Из A опускаются перпендикуляры на стороны, её не содержащие: BC и CD, и через их основания проводится прямая l_a. Аналогично определяются прямые l_b, l_c и l_d. Докажите, что все они пересекаются в одной точке.

7. Из основания A_1 биссектрисы AA_1 неравнобедренного треугольника ABC провели вторую касательную ко вписанной окружности, точку касания обозначили K_A. Аналогично строятся точки K_B и K_C. Докажите, что прямые, соединяющие K_A, K_B, K_C с серединами соответствующих сторон треугольника, пересекаются в точке, лежащей на вписанной в треугольник окружности.

8. На плоскости даны вписанный четырёхугольник $ABCD$ и точка X. Точки X_{AB}, X_{AC}, X_{AD}, X_{BC}, X_{BD}, X_{CD} — проекции точки X на прямые AB, AC, AD, BC, BD, CD соответственно. Докажите, что середины отрезков $X_{AB}X_{CD}$, $X_{AC}X_{BD}$, $X_{AD}X_{BC}$ лежат на одной прямой.

9. В треугольнике ABC O — центр описанной окружности. Прямая a проходит через середину высоты треугольника, опущенной из вершины A, и параллельна OA. Аналогично определяются прямые b и c. Докажите, что три эти прямые пересекаются в одной точке.