

Базовые факты

Соглашение. Точки будем называть заглавными буквами, а их комплексные координаты — соответствующими строчными (например, точка B имеет координату b).

1. а) Докажите, что $z = \bar{z}$ тогда и только тогда, когда z — действительное число.

б) Докажите, что $z = -\bar{z}$ тогда и только тогда, когда z — чисто мнимое число.

2. Докажите, что $AB^2 = (a - b)(\bar{a} - \bar{b})$.

3. а) Докажите, что различные точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{a-b}{a-c}$ — действительное число.

б) Выведите уравнение прямой, проходящей через точки A и B .

4. Докажите, что прямая, соединяющая две точки A и B , лежащие на окружности $z\bar{z} = 1$, задаётся уравнением $z + ab\bar{z} = a + b$.

5. а) Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\frac{a-b}{c-d}$ — чисто мнимое число.

б) Докажите, что хорды AB и CD окружности $z\bar{z} = 1$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $ab + cd = 0$.

6. а) Докажите, что касательная к окружности $z\bar{z} = 1$ в её точке A задаётся уравнением $z + a^2\bar{z} = 2a$.

б) Докажите, что касательные к окружности $z\bar{z} = 1$ в её точках A и B пересекаются в точке $\frac{2ab}{a+b}$.

7. Выразите через комплексные координаты точек A, B, C на окружности $z\bar{z} = 1$ координаты точки пересечения медиан, ортоцентра, середин сторон и оснований высот треугольника ABC .

8. Докажите, что различные точки A, B, C, D лежат на одной прямой или окружности тогда и только тогда, когда $\frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-d}{b-c}$ (двойное отношение чисел a, b, c, d) — действительное число.

Задачи

9. На сторонах треугольника ABC вовне построены квадраты $ABXP$ и $ACYQ$. Докажите, что медиана AM исходного треугольника перпендикулярна PQ и равна по длине половине PQ .

10. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон и относительно их середин, лежат на описанной около треугольника окружности.

11. Докажите, что прямая, содержащая основания двух высот треугольника, перпендикулярна радиусу описанной около него окружности, проведённому в третью вершину.

12. **Теорема Симсона.** Докажите, что если точки A, B, C, P лежат на одной окружности, то проекции точки P на стороны треугольника ABC лежат на одной прямой.

13. **Окружность Эйлера.** Докажите, что середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности.

14. **Теорема Ньютона.** Докажите, что в описанном четырёхугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой.

15. **Теорема Паскаля.** Докажите, что точки пересечения противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника (если они существуют) лежат на одной прямой.