9 класс	Счетное и бесконечное	6 февраля 2017

Базовые задачи

1. Постройте бесконечную последовательность натуральных чисел, в которой каждое натуральное число встречается бесконечное число раз.

Отображение $f : X \to Y$ называется *сюръективным*, если $\forall y \in Y \;\; \exists x : f(x) = y$; а *инъективным*, если $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$. Если отображение является одновременно и сюръективным и инъективным, то говорят, что оно *биективно* (взаимно-однозначно).

Множества X и Y называются *равномощными*, если существует биекция из X в Y.

2. Докажите, что любые два отрезка на плоскости равномощны.

Определение. Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется *счетным*.

3. Может ли шахматный король обойти бесконечную шахматную доску, побывав на каждом поле ровно по одному разу?

4. Докажите счетность множеств $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$.

Определение. Говорят, что множество имеет мощность *континуум*, если оно равномощно множеству точек интервала $(0; 1)$.

5. Докажите, что множество действительных чисел не является счетным.

6. Докажите, что множество точек отрезка $[0; 1]$ имеет мощность континуум.

7. Докажите, что **(a)** если к бесконечному множеству добавить конечное или счетное, то получится множество, равномощное исходному; **(b)** множество иррациональных чисел имеет мощность континуум.

8. Пусть P — множество всех подмножеств множества S. Найдите мощность множества P, если

(a) S — конечное множество; **(b)** S — счетное множество.

9. Докажите, что квадрат и отрезок равномощны.

10. Обязательно ли следующие множества являются не более чем счетными:

(a) множество непересекающихся кругов на плоскости?

(b) множество непересекающихся окружностей на плоскости?

(c) множество непересекающихся контуров восьмерок на плоскости?

(d) множество непересекающихся букв Т (два отрезка, конец одного из которых — внутренняя точка другого, и это их единственная общая точка) на плоскости?

11. Пусть P — множество всех подмножеств множества S. Докажите, что множества P и S не равномощны.

Дополнительные задачи

12. Можно ли расставить в клетки бесконечной клетчатой плоскости натуральные числа так, чтобы каждое число встречалось ровно один раз и чтобы любые два числа из одной строки или одного столбца были взаимно простыми?

13. Можно ли окрасить целочисленные точки плоскости в 2017 цветов так, чтобы все цвета присутствовали, на каждой прямой (содержащей не менее двух целых точек) раскраска была периодической, а раскраска плоскости не была периодической? (Раскраска плоскости называется *периодической*, если найдется ненулевой целочисленный вектор, при сдвиге на который раскраска переходит сама в себя.)

14. На первом шаге из отрезка $[0; 1]$ вырезают средний интервал $(1/3; 2/3)$ длины $1/3$, на втором — из каждого из оставшихся отрезков удаляют средние интервалы длиной $1/9$, $\ldots$, на n-ом — из каждого из оставшихся отрезков средние интервалы длины $1/3^n$. Множество, полученное после счетного числа таких шагов, называют *канторовым множеством*. Является ли канторово множество счетным?

15. Теорема Кантора–Бернштейна. Известно для двух множеств A, B есть инъекции $f : A \to B$ и $g : B \to A$. Докажите, что в таком случае множества A и B равномощны.

16. Найдите мощность множества всех счетных подмножеств отрезка $[0, 1]$.

17. Есть бесконечное дерево. Степень каждой вершины конечна. Докажите, что в нем есть бесконечный путь.

18. Пусть S — некоторое семейство подмножеств счетного множества такое, что среди любых двух множеств, лежащих в S одно является подмножеством другого. Обязательно ли множество S счетно?