9 класс	Комплексные числа — 3	26 января 2017

1. Основная теорема алгебры. Любой многочлен с комплексными коэффициентами (в том числе, и с действительными), отличный от константы, имеет комплексный корень.

Ясно, что достаточно доказать теорему для многочлена со старшим коэффициентом 1. Пусть наш многочлен имеет вид $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0$. Далее будем считать, что $a_0 \neq 0$ (иначе утверждение очевидно).

Определения. Точку z^n на комплексной плоскости назовём *Дамой*, а точку $P(z)$ – *Собачкой*. Пусть R — некоторое положительное число. Дама держит Собачку на поводке, *длиной поводка* будет R^n. Точка O — центр комплексной плоскости. Пусть также $R_0 = |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0| + 1$.

а) Число z начинает свой путь по комплексной плоскости в точке R, проходит один раз по окружности с центром в O радиуса R против часовой стрелки и возвращается в ту же точку. Докажите, что Дама движется по окружности радиуса R^n и обходит её ровно n раз.

б) Пусть $R = R_0$. Докажите, что расстояние между Дамой и Собачкой $|P(z) - z^n|$ не превосходит длины поводка.

Траектория Собачки — непрерывная линия, начинающаяся и заканчивающаяся в точке $P(R_0)$. Из предыдущего пункта следует, что на своём пути Собачка, как и Дама, n раз обходит вокруг точки O.

Начнём стягивать радиус начальной окружности от R_0 до нуля. Радиус окружности, по которой гуляет Дама, уменьшается, но она по-прежнему будет проходить n раз вокруг точки O. Траектория движения Собачки меняется непрерывно, и при радиусе, близком к нулю, она близка к точке a_0.

в) Рассмотрев функцию от переменной R, равную числу обходов Собачки вокруг точки O, докажите, что при некотором значении радиуса Собачка будет вынуждена пройти через O.

Следствие. У любого многочлена n-й степени ($n \neq 0$) ровно n комплексных корней (с учётом кратности).

2. Комплексное число z выходит из точки 1, обходит окружность радиуса 1 с центром в O против часовой стрелки и возвращается в ту же точку 1. По какой линии движется **а)** $\frac{1}{z}$; **б)** $z + \frac{1}{z}$; **в)** $z^2 + z + 1$?

3. Пусть $P(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами.

а) Докажите, что если $P(z) = 0$, то и $P(\overline{z}) = 0$.

б) Докажите, что $P(x)$ представляется в виде произведения многочленов с действительными коэффициентами, каждый из которых не выше второй степени.

4. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами принимает только положительные значения. Докажите, что найдутся многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами такие, что $P(x) = Q^2(x) + R^2(x)$.

5. Докажите, что многочлен $x^{666} + x^{555} + x^{444} + x^{333} + x^{222} + x^{111} + 1$ делится на $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

6. а) Разложите на множители с действительными коэффициентами (все они должны быть не выше второй степени) многочлен $x^{2n} - 1$.

б) Докажите, что $\sin\dfrac{\pi}{2n} \cdot \sin\dfrac{2\pi}{2n} \cdot \ldots \cdot \sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

в) Докажите, что $\cos\dfrac{\pi}{2n} \cdot \cos\dfrac{2\pi}{2n} \cdot \ldots \cdot \cos\dfrac{(n-1)\pi}{2n} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

7. При каких натуральных n выражение $a^n(b-c) + b^n(c-a) + c^n(a-b)$ делится на $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac$?