9 класс **Готовимся к регионалке — 3** 23 января 2017

1. По кругу стоят 111 различных натуральных чисел, не превосходящих 500. Может ли оказаться так, что для каждого из этих чисел его последняя цифры совпадает с последней цифрой суммы всех остальных чисел?

2. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Оказалось, что для любых различных чисел a и b верно неравенство $f(a^2+b^2) > f(2ab)$. Докажите, что хотя бы один из корней этого трёхчлена — отрицательный.

3. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон AB, BC, AC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. На продолжении отрезка AA_1 за точку A взята точка D такая, что $AD = AC_1$. Прямые DB_1 и DC_1 пересекают вторично окружность ω в точках B_2 и C_2. Докажите, что B_2C_2 — диаметр окружности ω.

4. Имеются 2013 карточек, на которых написана цифра 1, и 2013 карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек 4026-значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится заплатить как можно меньше?

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. На отрезке CL выбрана точка M. Касательная в точке B к окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает луч CA в точке P. Касательные в точках B и M к окружности, описанной около треугольника BLM, пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые PQ и BL параллельны.

6. Депутаты Парламента образовали несколько комиссий не более чем из 10 человек каждая. Известно, что для любых одиннадцати комиссий найдётся человек, который входит во все эти комиссии. Докажите, что найдётся человек, который входит во все комиссии.

7. Что больше: $(100!)!$ или $99!^{100!} \cdot 100!^{99!}$?

8. В клетках доски 8×8 расставлены числа 1 и -1. Рассмотрим всевозможные расположения Т-тетраминошки на доске. Назовём расположение *неудачным*, если сумма чисел, стоящих в четырёх клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений.

9 класс **Готовимся к регионалке — 3** 23 января 2017

1. По кругу стоят 111 различных натуральных чисел, не превосходящих 500. Может ли оказаться так, что для каждого из этих чисел его последняя цифры совпадает с последней цифрой суммы всех остальных чисел?

2. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Оказалось, что для любых различных чисел a и b верно неравенство $f(a^2+b^2) > f(2ab)$. Докажите, что хотя бы один из корней этого трёхчлена — отрицательный.

3. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон AB, BC, AC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. На продолжении отрезка AA_1 за точку A взята точка D такая, что $AD = AC_1$. Прямые DB_1 и DC_1 пересекают вторично окружность ω в точках B_2 и C_2. Докажите, что B_2C_2 — диаметр окружности ω.

4. Имеются 2013 карточек, на которых написана цифра 1, и 2013 карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек 4026-значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится заплатить как можно меньше?

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. На отрезке CL выбрана точка M. Касательная в точке B к окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает луч CA в точке P. Касательные в точках B и M к окружности, описанной около треугольника BLM, пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые PQ и BL параллельны.

6. Депутаты Парламента образовали несколько комиссий не более чем из 10 человек каждая. Известно, что для любых одиннадцати комиссий найдётся человек, который входит во все эти комиссии. Докажите, что найдётся человек, который входит во все комиссии.

7. Что больше: $(100!)!$ или $99!^{100!} \cdot 100!^{99!}$?

8. В клетках доски 8×8 расставлены числа 1 и -1. Рассмотрим всевозможные расположения Т-тетраминошки на доске. Назовём расположение *неудачным*, если сумма чисел, стоящих в четырёх клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений.