9 класс — Комплексные числа — 2 — 19 января 2017

Тригонометрическая форма. Для любого комплексного числа $z \neq 0$ справедливо равенство $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $|z|$ и φ — соответственно модуль и аргумент числа z.

Факт. При произведении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. А при отношении модули делятся, а аргументы вычитаются.

Формула Муавра. Дано натуральное n. Если $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

1. Вычислите **а)** $\frac{(1-i)^7(\sqrt{3}+i)^{10}}{(1+i)^{15}}$; **б)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$.

2. Найдите все значения корней **а)** $\sqrt[4]{-1}$; **б)** $\sqrt{2-2i}$; **в)** $\sqrt[8]{i\sqrt{3}-1}$.

3. Нарисуйте на комплексной плоскости все корни уравнения $z^n = 1$. Чему равно их произведение? А сумма? А сумма k-х степеней?

4. Комплексные числа a, b, c имеют модуль 1. Найдите $\left|\frac{a+b+c}{ab+bc+ac}\right|$.

5. Вычислите сумму
а) $1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$;
б) $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$.

6. Вычислите сумму
а) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots$;
б) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$;
в) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots$;
г) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots$.

7. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — точки комплексной плоскости, являющиеся вершинами выпуклого n-угольника. Точка z такова, что $\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \ldots + \frac{1}{z-z_n} = 0$. Докажите, что точка z лежит внутри этого n-угольника.

8. а) Назовём корень из единицы n-й степени, равный ξ, *примитивным*, если $\xi^m \neq 1$ для всех натуральных m, меньших n. Найдите значение выражения $(1-\xi)(1-\xi^2)(1-\xi^3)\ldots(1-\xi^{n-1})$.

б) В окружность радиуса 1 вписан правильный n-угольник. Найдите произведение всех сторон и диагоналей, проведённых из одной вершины.

9. Конечное множество M комплексных чисел таково, что если $z \in M$, то и $z^n \in M$ при любом натуральном n. Чему может быть равна сумма всех элементов M?

9 класс — Комплексные числа — 2 — 19 января 2017

Тригонометрическая форма. Для любого комплексного числа $z \neq 0$ справедливо равенство $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $|z|$ и φ — соответственно модуль и аргумент числа z.

Факт. При произведении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. А при отношении модули делятся, а аргументы вычитаются.

Формула Муавра. Дано натуральное n. Если $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

1. Вычислите **а)** $\frac{(1-i)^7(\sqrt{3}+i)^{10}}{(1+i)^{15}}$; **б)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$.

2. Найдите все значения корней **а)** $\sqrt[4]{-1}$; **б)** $\sqrt{2-2i}$; **в)** $\sqrt[8]{i\sqrt{3}-1}$.

3. Нарисуйте на комплексной плоскости все корни уравнения $z^n = 1$. Чему равно их произведение? А сумма? А сумма k-х степеней?

4. Комплексные числа a, b, c имеют модуль 1. Найдите $\left|\frac{a+b+c}{ab+bc+ac}\right|$.

5. Вычислите сумму
а) $1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$;
б) $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$.

6. Вычислите сумму
а) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots$;
б) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$;
в) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots$;
г) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots$.

7. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — точки комплексной плоскости, являющиеся вершинами выпуклого n-угольника. Точка z такова, что $\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \ldots + \frac{1}{z-z_n} = 0$. Докажите, что точка z лежит внутри этого n-угольника.

8. а) Назовём корень из единицы n-й степени, равный ξ, *примитивным*, если $\xi^m \neq 1$ для всех натуральных m, меньших n. Найдите значение выражения $(1-\xi)(1-\xi^2)(1-\xi^3)\ldots(1-\xi^{n-1})$.

б) В окружность радиуса 1 вписан правильный n-угольник. Найдите произведение всех сторон и диагоналей, проведённых из одной вершины.

9. Конечное множество M комплексных чисел таково, что если $z \in M$, то и $z^n \in M$ при любом натуральном n. Чему может быть равна сумма всех элементов M?