9 класс **Готовимся к регионалке — 2** 16 января 2017

1. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что многочлен $f^5(x) - f(x)$ имеет ровно 3 действительных корня. Найдите ординату вершины графика этого трёхчлена.

2. Можно ли при каком-то натуральном k разбить все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

3. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

4. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны. Докажите, что если биссектрисы углов DAC, DBC, ACB и ADB образовали ромб, то $AB = CD$.

5. Числа a и b таковы, что $a^3 - b^3 = 2$ и $a^5 - b^5 \geqslant 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant 2$.

6. Точка D на стороне BC остроугольного треугольника ABC такова, что $AB = AD$. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает сторону AC в точках A и K. Прямая DK пересекает перпендикуляр, опущенный из B на AC, в точке L. Докажите, что $CL = BC$.

7. Какое наименьшее количество клеток требуется отметить на шахматной доске так, чтобы каждая клетка доски (отмеченная или неотмеченная) граничила по стороне хотя бы с одной отмеченной клеткой?

8. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число $am^2 + bn^2$ является точным квадратом. Докажите, что $ab = 0$.

9. В языке племени АУ две буквы — "а" и "у". Некоторые последовательности этих букв являются словами, причём в каждом слове не больше 13 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова, то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке.

9 класс **Готовимся к регионалке — 2** 16 января 2017

1. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что многочлен $f^5(x) - f(x)$ имеет ровно 3 действительных корня. Найдите ординату вершины графика этого трёхчлена.

2. Можно ли при каком-то натуральном k разбить все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

3. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

4. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны. Докажите, что если биссектрисы углов DAC, DBC, ACB и ADB образовали ромб, то $AB = CD$.

5. Числа a и b таковы, что $a^3 - b^3 = 2$ и $a^5 - b^5 \geqslant 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant 2$.

6. Точка D на стороне BC остроугольного треугольника ABC такова, что $AB = AD$. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает сторону AC в точках A и K. Прямая DK пересекает перпендикуляр, опущенный из B на AC, в точке L. Докажите, что $CL = BC$.

7. Какое наименьшее количество клеток требуется отметить на шахматной доске так, чтобы каждая клетка доски (отмеченная или неотмеченная) граничила по стороне хотя бы с одной отмеченной клеткой?

8. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число $am^2 + bn^2$ является точным квадратом. Докажите, что $ab = 0$.

9. В языке племени АУ две буквы — "а" и "у". Некоторые последовательности этих букв являются словами, причём в каждом слове не больше 13 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова, то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке.