9 класс — **Комплексные числа** — 12 января 2017

Определения. *Комплексными числами* называются числа вида $z = a+bi$, где a и b – действительные, а i – так называемая *мнимая единица*, то есть число, квадрат которого равен –1. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Число $\overline{z} = a - bi$ называется *комплексно сопряжённым* к числу $z = a + bi$.

Координатная плоскость, каждой точке Z с координатами a и b которой сопоставлено комплексное число z по правилу: $Z(a, b) \to z = a + bi$, называется *комплексной плоскостью* ($Re\ z$ — абсцисса, а $Im\ z$ — ордината точки Z). Множество действительных чисел при этом изображается одной из осей координат, называемой *действительной* осью $Re\ z$, а множество чисто мнимых чисел (у которых действительная часть равна 0), изображается другой осью координат — *мнимой* осью $Im\ z$.

Упражнение 1. Проверьте, что $\overline{z + z'} = \overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$; $\overline{z/z'} = \overline{z}/\overline{z'}$; $\overline{\overline{z}} = z$.

Упражнение 2. Проверьте, что $z + \overline{z} = 2 \cdot Re\ z$; $z - \overline{z} = 2i \cdot Im\ z$; $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Каждое комплексное число $z = a+bi$ можно понимать как вектор $\overrightarrow{OZ}$, с началом в точке O и с концом в точке (a, b) на комплексной плоскости.

Модулем числа z (обозначается $|z|$) называется длина вектора $\overrightarrow{OZ}$, а *аргументом* ненулевого числа z (обозначается $\arg z$) — ориентированный угол между положительным направлением действительной оси и вектором $\overrightarrow{OZ}$. Для числа $z = 0$ аргумент не определён. Значение аргумента данного комплексного числа определяется неоднозначно, но все аргументы отличаются на слагаемое $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Обычно аргументом считают угол из промежутка $(-\pi, \pi]$.

1. а) Изобразите на комплексной плоскости числа 1, i, i^2, $1 + i$, $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите их модули и аргументы.

б) У комплексного числа модуль 2, а аргумент $-\frac{31\pi}{6}$. Найдите это число.

2. а) Докажите, что модуль произведения равен произведению модулей.

б) Докажите, что произведение двух натуральных чисел, представимых в виде суммы двух квадратов целых чисел, тоже так представимо.

3. Для комплексных чисел докажите, что $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$.

4. Изобразите на комплексной плоскости (мыслить нужно *геометрически*!) следующие множества:

а) $|z| = 3$; **б)** $z = -\overline{z}$; **в)** $|z| = -Re\ z$; **г)** $|z|+\arg z = 2+i$; **д)** $\arg(3-z) = \pi$;
е) $1 < |z - 1 + i| \leqslant 3$; **ё)** $|z - i| = |z - 3i + 2|$; **ж)** $|z - i| > |z + 1|$;
з) $|z - i - 1| = 2|z + 2i - 1|$.

5. Решите уравнение **а)** $z^2 - 6z + 13 = 0$; **б)** $z^2 - 5z + 7 - i = 0$;
в) $z^2 - (4 + i)z + 10 + 2i = 0$.

6. Даны комплексные числа a, b, c. Докажите, что $Re(a - c)(\overline{c} - \overline{b}) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $|c - \frac{a+b}{2}| \leqslant \frac{1}{2}|a - b|$.

9 класс — **Комплексные числа** — 12 января 2017

Определения. *Комплексными числами* называются числа вида $z = a+bi$, где a и b – действительные, а i – так называемая *мнимая единица*, то есть число, квадрат которого равен –1. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Число $\overline{z} = a - bi$ называется *комплексно сопряжённым* к числу $z = a + bi$.

Координатная плоскость, каждой точке Z с координатами a и b которой сопоставлено комплексное число z по правилу: $Z(a, b) \to z = a + bi$, называется *комплексной плоскостью* ($Re\ z$ — абсцисса, а $Im\ z$ — ордината точки Z). Множество действительных чисел при этом изображается одной из осей координат, называемой *действительной* осью $Re\ z$, а множество чисто мнимых чисел (у которых действительная часть равна 0), изображается другой осью координат — *мнимой* осью $Im\ z$.

Упражнение 1. Проверьте, что $\overline{z + z'} = \overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$; $\overline{z/z'} = \overline{z}/\overline{z'}$; $\overline{\overline{z}} = z$.

Упражнение 2. Проверьте, что $z + \overline{z} = 2 \cdot Re\ z$; $z - \overline{z} = 2i \cdot Im\ z$; $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Каждое комплексное число $z = a+bi$ можно понимать как вектор $\overrightarrow{OZ}$, с началом в точке O и с концом в точке (a, b) на комплексной плоскости.

Модулем числа z (обозначается $|z|$) называется длина вектора $\overrightarrow{OZ}$, а *аргументом* ненулевого числа z (обозначается $\arg z$) — ориентированный угол между положительным направлением действительной оси и вектором $\overrightarrow{OZ}$. Для числа $z = 0$ аргумент не определён. Значение аргумента данного комплексного числа определяется неоднозначно, но все аргументы отличаются на слагаемое $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Обычно аргументом считают угол из промежутка $(-\pi, \pi]$.

1. а) Изобразите на комплексной плоскости числа 1, i, i^2, $1 + i$, $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите их модули и аргументы.

б) У комплексного числа модуль 2, а аргумент $-\frac{31\pi}{6}$. Найдите это число.

2. а) Докажите, что модуль произведения равен произведению модулей.

б) Докажите, что произведение двух натуральных чисел, представимых в виде суммы двух квадратов целых чисел, тоже так представимо.

3. Для комплексных чисел докажите, что $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$.

4. Изобразите на комплексной плоскости (мыслить нужно *геометрически*!) следующие множества:

а) $|z| = 3$; **б)** $z = -\overline{z}$; **в)** $|z| = -Re\ z$; **г)** $|z|+\arg z = 2+i$; **д)** $\arg(3-z) = \pi$;
е) $1 < |z - 1 + i| \leqslant 3$; **ё)** $|z - i| = |z - 3i + 2|$; **ж)** $|z - i| > |z + 1|$;
з) $|z - i - 1| = 2|z + 2i - 1|$.

5. Решите уравнение **а)** $z^2 - 6z + 13 = 0$; **б)** $z^2 - 5z + 7 - i = 0$;
в) $z^2 - (4 + i)z + 10 + 2i = 0$.

6. Даны комплексные числа a, b, c. Докажите, что $Re(a - c)(\overline{c} - \overline{b}) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $|c - \frac{a+b}{2}| \leqslant \frac{1}{2}|a - b|$.