9 класс — Комбинаторная геометрия — 19 декабря 2016

1. При каких k существует замкнутая k-звенная ломаная такая, что каждое её ребро пересечено некоторым другим ребром ровно один раз (т.е. рёбра разбиваются на пары пересекающихся)?

2. На плоскости отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Саша разбивает точки на пары, после чего соединяет точки в каждой из пар отрезком. Всегда ли он может это сделать так, чтобы каждые два отрезка пересекались?

3. На плоскости нарисовано несколько многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая все эти многоугольники.

4. Докажите, что замкнутая ломаная длины 1, расположенная на плоскости, может быть накрыта кругом радиуса $\frac{1}{4}$.

5. Каждая сторона правильного треугольника разбита на 30 равных частей. Прямые, проведённые через точки деления параллельно сторонам треугольников, разбивают его на 900 маленьких треугольников. Каково максимальное количество вершин разбиения, никакие две из которых не лежат на проведённой прямой или стороне?

6. Квадрат разбит на прямоугольники. Назовём *цепочкой* подмножество K множества этих прямоугольников такое, что существует сторона S квадрата, целиком закрытая проекциями прямоугольников из K, но при этом ни в какую точку S не проецируются внутренние точки двух прямоугольников из K (к прямоугольнику относятся и его стороны). Докажите, что любые два прямоугольника разбиения входят в некоторую цепочку.

7. На плоскости рассматривается конечное множество равных параллельно расположенных квадратов, причём среди любых $k+1$ квадратов найдутся два пересекающихся. Докажите, что это множество можно разбить не более чем на $2k-1$ непустых подмножеств так, что в каждом подмножестве все квадраты будут иметь общую точку.

9 класс — Комбинаторная геометрия — 19 декабря 2016

1. При каких k существует замкнутая k-звенная ломаная такая, что каждое её ребро пересечено некоторым другим ребром ровно один раз (т.е. рёбра разбиваются на пары пересекающихся)?

2. На плоскости отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Саша разбивает точки на пары, после чего соединяет точки в каждой из пар отрезком. Всегда ли он может это сделать так, чтобы каждые два отрезка пересекались?

3. На плоскости нарисовано несколько многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая все эти многоугольники.

4. Докажите, что замкнутая ломаная длины 1, расположенная на плоскости, может быть накрыта кругом радиуса $\frac{1}{4}$.

5. Каждая сторона правильного треугольника разбита на 30 равных частей. Прямые, проведённые через точки деления параллельно сторонам треугольников, разбивают его на 900 маленьких треугольников. Каково максимальное количество вершин разбиения, никакие две из которых не лежат на проведённой прямой или стороне?

6. Квадрат разбит на прямоугольники. Назовём *цепочкой* подмножество K множества этих прямоугольников такое, что существует сторона S квадрата, целиком закрытая проекциями прямоугольников из K, но при этом ни в какую точку S не проецируются внутренние точки двух прямоугольников из K (к прямоугольнику относятся и его стороны). Докажите, что любые два прямоугольника разбиения входят в некоторую цепочку.

7. На плоскости рассматривается конечное множество равных параллельно расположенных квадратов, причём среди любых $k+1$ квадратов найдутся два пересекающихся. Докажите, что это множество можно разбить не более чем на $2k-1$ непустых подмножеств так, что в каждом подмножестве все квадраты будут иметь общую точку.