9 класс **Числовой разнобой** 12 декабря 2016

1. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+4)$ будет целым.

2. В ряд записана последовательность чисел a_n, причём оказалось, что для любого числа, начиная с третьего, справедлива формула $a_n = a_{n-2}+2a_{n-1}$. Оказалось, что первые два члена — простые числа. Какое максимальное количество подряд идущих простых чисел может еще встретиться после них?

3. Дано четное число a. Докажите, что существует бесконечно много нечетных натуральных чисел n таких, что a^n+n — составное число.

4. Дано натуральное число $n>1$. Для каждого делителя d числа $n+1$ Петя разделил число n на d с остатком и записал на доску неполное частное, а в тетрадь – остаток. (Например, при делении числа 17 на 6, $17 = 6\cdot 2+5$, то есть неполное частное равно 2, а остаток – 5.) Докажите, что наборы чисел на доске и в тетради совпадают.

5. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде $\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$, где a и b – натуральные.

6. Докажите, что множество всех натуральных чисел, больших единицы, нельзя разбить на два непустых множества так, что если числа a и b лежат в одном множестве, то и число $ab-1$ лежит в том же множестве.

7. Дано простое число p. Докажите, что из $p+1$ попарно различных чисел можно выбрать два числа таких, что отношение большего из них к их наибольшему общему делителю не меньше $p+1$.

9 класс **Числовой разнобой** 12 декабря 2016

1. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+4)$ будет целым.

2. В ряд записана последовательность чисел a_n, причём оказалось, что для любого числа, начиная с третьего, справедлива формула $a_n = a_{n-2}+2a_{n-1}$. Оказалось, что первые два члена — простые числа. Какое максимальное количество подряд идущих простых чисел может еще встретиться после них?

3. Дано четное число a. Докажите, что существует бесконечно много нечетных натуральных чисел n таких, что a^n+n — составное число.

4. Дано натуральное число $n>1$. Для каждого делителя d числа $n+1$ Петя разделил число n на d с остатком и записал на доску неполное частное, а в тетрадь – остаток. (Например, при делении числа 17 на 6, $17 = 6\cdot 2+5$, то есть неполное частное равно 2, а остаток – 5.) Докажите, что наборы чисел на доске и в тетради совпадают.

5. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде $\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$, где a и b – натуральные.

6. Докажите, что множество всех натуральных чисел, больших единицы, нельзя разбить на два непустых множества так, что если числа a и b лежат в одном множестве, то и число $ab-1$ лежит в том же множестве.

7. Дано простое число p. Докажите, что из $p+1$ попарно различных чисел можно выбрать два числа таких, что отношение большего из них к их наибольшему общему делителю не меньше $p+1$.