9 класс **Метод Штурма** 5 декабря 2016

1. Пусть сумма положительных a и b фиксирована. Как при сближении ведёт себя величина

(a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; **(b)** a^2+b^2; **(c)** a^3+b^3; **(d)** a^n+b^n; **(e)** $\sqrt{a}+\sqrt{b}$?

(f) Тот же самый вопрос, если фиксировано произведение чисел.

2. С помощью метода Штурма докажите неравенство о средних: для любых неотрицательных $x_1, x_2 \ldots, x_n$ выполнено

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

3. Докажите, что при $x_1, \ldots, x_n \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{1+x_1}+\ldots+\frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}}.$$

4. Докажите, что среди выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшим периметром и наибольшей площадью будет обладать правильный.

5. Внутри остроугольного треугольника ABC со сторонами a, b, c отметили точку X. Из точки X опустили перпендикуляры XA_1, XB_1, XC_1 на стороны BC, AC, AB соответственно. Докажите, что

$$(XA_1^2+XB_1^2+XC_1^2)(a+b+c) \geqslant 3(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

6. Пусть $a, b, c, d \geqslant 0$ и $a+b+c+d=1$. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$(a^2-7ab+b^2)(2c^2-11cd+2d^2).$$

7. Пусть $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{2n+1}$ — вещественные числа. Докажите, что

$$(x_1-x_2+x_3-\ldots-x_{2n}+x_{2n+1})^2 \leqslant x_1^2-x_2^2+x_3^2-\ldots-x_{2n}^2+x_{2n+1}^2.$$

8. (a) Положительные числа x, y, z таковы, что сумма любых двух больше третьего. Докажите, что

$$(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z) \leqslant xyz.$$

(b) Даны положительные числа a, b, c, d, e. Рассмотрим всевозможные разности между суммой трех из этих пяти чисел и суммой двух оставшихся чисел. Оказалось, что все такие разности положительны. Докажите, что произведение этих разностей не превосходит $(abcde)^2$.

9 класс **Метод Штурма** 5 декабря 2016

1. Пусть сумма положительных a и b фиксирована. Как при сближении ведёт себя величина

(a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; **(b)** a^2+b^2; **(c)** a^3+b^3; **(d)** a^n+b^n; **(e)** $\sqrt{a}+\sqrt{b}$?

(f) Тот же самый вопрос, если фиксировано произведение чисел.

2. С помощью метода Штурма докажите неравенство о средних: для любых неотрицательных $x_1, x_2 \ldots, x_n$ выполнено

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

3. Докажите, что при $x_1, \ldots, x_n \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{1+x_1}+\ldots+\frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}}.$$

4. Докажите, что среди выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшим периметром и наибольшей площадью будет обладать правильный.

5. Внутри остроугольного треугольника ABC со сторонами a, b, c отметили точку X. Из точки X опустили перпендикуляры XA_1, XB_1, XC_1 на стороны BC, AC, AB соответственно. Докажите, что

$$(XA_1^2+XB_1^2+XC_1^2)(a+b+c) \geqslant 3(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

6. Пусть $a, b, c, d \geqslant 0$ и $a+b+c+d=1$. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$(a^2-7ab+b^2)(2c^2-11cd+2d^2).$$

7. Пусть $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{2n+1}$ — вещественные числа. Докажите, что

$$(x_1-x_2+x_3-\ldots-x_{2n}+x_{2n+1})^2 \leqslant x_1^2-x_2^2+x_3^2-\ldots-x_{2n}^2+x_{2n+1}^2.$$

8. (a) Положительные числа x, y, z таковы, что сумма любых двух больше третьего. Докажите, что

$$(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z) \leqslant xyz.$$

(b) Даны положительные числа a, b, c, d, e. Рассмотрим всевозможные разности между суммой трех из этих пяти чисел и суммой двух оставшихся чисел. Оказалось, что все такие разности положительны. Докажите, что произведение этих разностей не превосходит $(abcde)^2$.