9 класс | Узнайте точку | 28 ноября 2016

1. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей. Точка O_1 симметрична O относительно AD и лежит на описанной окружности четырёхугольника. Докажите, что O_1O — биссектриса угла BO_1C.

2. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки P и Q соответственно. Докажите, что $PQ = BP + DQ$ тогда и только тогда, когда $\angle PAQ = 45°$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Пусть I, I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABC, ACH и BCH соответственно. Докажите, что прямые CI и I_1I_2 перпендикулярны.

4. Пусть I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон BC, AC, AB соответственно. Пусть l_a — прямая, перпендикулярная прямой BC, проходящая через I_a. Аналогично определяются прямые l_b и l_c. Докажите, что прямые l_a, l_b, l_c пересекаются в одной точке.

5. В прямоугольном треугольнике с прямым углом C проведены трисектрисы AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, причём точки A_2 и B_2 лежат на отрезках CA_1 и CB_1 соответственно. Пусть P — точка пересечения AA_2 и BB_2, Q — точка пересечения AA_1 и BB_1. Докажите, что P — центр описанной окружности треугольника QA_2B_2.

6. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудалённую от точек C и D. Пусть K — середина AB. Докажите, что $\angle MKD = 90°$.

7. В треугольнике ABC с углом B, равным $120°$, проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = 90°$.

8. В треугольнике ABC на биссектрисе AA_1 выбрана точка O такая, что $\angle OBC = \angle BAC + \angle BCA$. Прямые BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = 90°$.

9. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Вписанная в треугольник BCD окружность касается стороны CD в точке E. Точка F на биссектрисе угла $\angle DAC$ такова, что прямые EF и CD перпендикулярны. Описанная окружность треугольника ACF пересекает прямую CD в точках C и G. Докажите, что треугольник AFG — равнобедренный.

9 класс | Узнайте точку | 28 ноября 2016

1. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей. Точка O_1 симметрична O относительно AD и лежит на описанной окружности четырёхугольника. Докажите, что O_1O — биссектриса угла BO_1C.

2. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки P и Q соответственно. Докажите, что $PQ = BP + DQ$ тогда и только тогда, когда $\angle PAQ = 45°$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Пусть I, I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABC, ACH и BCH соответственно. Докажите, что прямые CI и I_1I_2 перпендикулярны.

4. Пусть I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон BC, AC, AB соответственно. Пусть l_a — прямая, перпендикулярная прямой BC, проходящая через I_a. Аналогично определяются прямые l_b и l_c. Докажите, что прямые l_a, l_b, l_c пересекаются в одной точке.

5. В прямоугольном треугольнике с прямым углом C проведены трисектрисы AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, причём точки A_2 и B_2 лежат на отрезках CA_1 и CB_1 соответственно. Пусть P — точка пересечения AA_2 и BB_2, Q — точка пересечения AA_1 и BB_1. Докажите, что P — центр описанной окружности треугольника QA_2B_2.

6. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудалённую от точек C и D. Пусть K — середина AB. Докажите, что $\angle MKD = 90°$.

7. В треугольнике ABC с углом B, равным $120°$, проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = 90°$.

8. В треугольнике ABC на биссектрисе AA_1 выбрана точка O такая, что $\angle OBC = \angle BAC + \angle BCA$. Прямые BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = 90°$.

9. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Вписанная в треугольник BCD окружность касается стороны CD в точке E. Точка F на биссектрисе угла $\angle DAC$ такова, что прямые EF и CD перпендикулярны. Описанная окружность треугольника ACF пересекает прямую CD в точках C и G. Докажите, что треугольник AFG — равнобедренный.