9 класс **Многочлены. ОТА** 24 ноября 2016

Определение. Многочлен $P(x)$ *делится* на многочлен $Q(x) \neq 0$, если существует многочлен $R(x)$ такой, что $P(x) = Q(x)R(x)$.

Многочлен h является *общим делителем* многочленов f и g, если $f \,\vdots\, h$ и $g \,\vdots\, h$, и называется *наибольшим общим делителем*, если его степень не меньше степени любого другого общего делителя f и g.

Определение. Многочлен $f(x) \neq 0$ называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов меньшей степени.

1. Деление с остатком. Докажите, что для любых многочленов $f(x)$ и $g(x) \neq 0$ существуют единственные многочлены $q(x)$ и $r(x)$ такие, что $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ и $\deg r < \deg g$.

2. Теорема Безу. а) Докажите, что остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - a$ равен $f(a)$. **б)** Докажите, что $f(x) \,\vdots\, x - a \;\Leftrightarrow\; f(a) = 0$.

3. а) Алгоритм Евклида. Пусть $f(x)$ и $g(x) \neq 0$ – многочлены. Рассмотрим последовательные деления с остатком $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$, $g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x)$, $r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x)$,$\ldots$, $r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)q_n(x) + r_n(x)$, $r_{n-1}(x) = r_n(x)q_{n+1}(x)$. Докажите, что $(f(x), g(x)) = r_n(x)$.

б) Линейное представление НОД. Докажите, что для любых многочленов $f(x)$ и $g(x)$ существуют многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$.

4. а) Докажите, что если $f(x)g(x) \,\vdots\, h(x)$ и $(f(x), h(x)) = 1$, то $g(x) \,\vdots\, h(x)$.

б) Основная теорема арифметики. Докажите, что любой многочлен может быть представлен в виде произведения неприводимых сомножителей единственным образом с точностью до перестановки и домножения сомножителей на константы.

5. Найдите НОД многочленов
а) $x^2 - 6x + 8$ и $x^5 - 3x^3 - 7x^2 + 33x - 46$;
б) $x^4 - 3x^3 - 22x^2 + 23x + 34$ и $x^3 + 3x^2 - 5x - 6$;
в) $x^m - 1$ и $x^n - 1$ при натуральных m и n;
г) $x^{2^m} + 1$ и $x^{2^n} + 1$ при различных натуральных m и n.

6. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{6\alpha^3 + 7\alpha^2 - 2\alpha - 1}$, где α – корень многочлена $2x^2 + x - 2$.

7. Многочлен $P(x)$ получен из многочлена $Q(x)$ с целыми коэффициентами перестановкой коэффициентов. Докажите, что $P(2016) - Q(2016) \,\vdots\, 2015$.

8. Многочлен $P(x)$ даёт остаток 3 при делении на $x - 1$, остаток 5 при делении на $x - 2$ и остаток 7 при делении на $x - 3$. Какой остаток многочлен $P(x)$ даёт при делении на $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$?

9. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — взаимно простые многочлены с целыми коэффициентами (т.е. $(P(x), Q(x)) = 1$). Докажите, что существует число C такое, что для всех целых n верно $(P(n), Q(n)) < C$.

9 класс **Многочлены. ОТА** 24 ноября 2016

Определение. Многочлен $P(x)$ *делится* на многочлен $Q(x) \neq 0$, если существует многочлен $R(x)$ такой, что $P(x) = Q(x)R(x)$.

Многочлен h является *общим делителем* многочленов f и g, если $f \,\vdots\, h$ и $g \,\vdots\, h$, и называется *наибольшим общим делителем*, если его степень не меньше степени любого другого общего делителя f и g.

Определение. Многочлен $f(x) \neq 0$ называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов меньшей степени.

1. Деление с остатком. Докажите, что для любых многочленов $f(x)$ и $g(x) \neq 0$ существуют единственные многочлены $q(x)$ и $r(x)$ такие, что $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ и $\deg r < \deg g$.

2. Теорема Безу. а) Докажите, что остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - a$ равен $f(a)$. **б)** Докажите, что $f(x) \,\vdots\, x - a \;\Leftrightarrow\; f(a) = 0$.

3. а) Алгоритм Евклида. Пусть $f(x)$ и $g(x) \neq 0$ – многочлены. Рассмотрим последовательные деления с остатком $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$, $g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x)$, $r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x)$,$\ldots$, $r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)q_n(x) + r_n(x)$, $r_{n-1}(x) = r_n(x)q_{n+1}(x)$. Докажите, что $(f(x), g(x)) = r_n(x)$.

б) Линейное представление НОД. Докажите, что для любых многочленов $f(x)$ и $g(x)$ существуют многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$.

4. а) Докажите, что если $f(x)g(x) \,\vdots\, h(x)$ и $(f(x), h(x)) = 1$, то $g(x) \,\vdots\, h(x)$.

б) Основная теорема арифметики. Докажите, что любой многочлен может быть представлен в виде произведения неприводимых сомножителей единственным образом с точностью до перестановки и домножения сомножителей на константы.

5. Найдите НОД многочленов
а) $x^2 - 6x + 8$ и $x^5 - 3x^3 - 7x^2 + 33x - 46$;
б) $x^4 - 3x^3 - 22x^2 + 23x + 34$ и $x^3 + 3x^2 - 5x - 6$;
в) $x^m - 1$ и $x^n - 1$ при натуральных m и n;
г) $x^{2^m} + 1$ и $x^{2^n} + 1$ при различных натуральных m и n.

6. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{6\alpha^3 + 7\alpha^2 - 2\alpha - 1}$, где α – корень многочлена $2x^2 + x - 2$.

7. Многочлен $P(x)$ получен из многочлена $Q(x)$ с целыми коэффициентами перестановкой коэффициентов. Докажите, что $P(2016) - Q(2016) \,\vdots\, 2015$.

8. Многочлен $P(x)$ даёт остаток 3 при делении на $x - 1$, остаток 5 при делении на $x - 2$ и остаток 7 при делении на $x - 3$. Какой остаток многочлен $P(x)$ даёт при делении на $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$?

9. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — взаимно простые многочлены с целыми коэффициентами (т.е. $(P(x), Q(x)) = 1$). Докажите, что существует число C такое, что для всех целых n верно $(P(n), Q(n)) < C$.