9 класс **По мотивам Колма** 31 октября 2016

1. По законам страны Анчурии, телефонные номера всех абонентов должны состоять из 10 цифр (цифры могут быть от 0 до 9, причем нули могут стоять в том числе и в начале номера), а у любых двух абонентов номера должны различаться хотя бы в двух цифрах, либо ровно в одной цифре, но хотя бы на 2. Какое наибольшее количество телефонных номеров может быть в Анчурии?

2. На окружности отмечены четыре дуги: в 200°, 300°, 310° и 320°. Докажите, что на окружности есть точка, принадлежащая ровно трём отмеченным дугам.

3. Решите уравнение в простых числах: $p + p^2 + p^3 + p^4 = q!$.

4. Вписанная окружность ω равнобедренного треугольника ABC касается его равных сторон AB, BC и основания AC в точках P, Q и R соответственно. Отрезки AQ и CP пересекают повторно окружность ω в точках K и L соответственно. Обозначим точки пересечения отрезков PR и QR с KL через X и Y. Продлим отрезок KL до пересечения со сторонами треугольника AB и BC в точках Z и T соответственно. Докажите, что $ZK = XY = LT$.

5. Какое наибольшее количество двухэлементных подмножеств множества натуральных чисел, не превосходящих 2016, можно выбрать таким образом, чтобы для любых двух выбранных подмножеств одно из них состояло из двух наименьших элементов их объединения?

6. В кружке n ребят, причём любые двое ребят либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у каждого из ребят ровно 30 врагов в этом же кружке, причём если A дружит с B, но враждует с C, то B и C враждуют. Найдите все возможные значения n.

7. Девятизначное число n называется *забавным*, если в нём есть все цифры от 1 до 9 и $\left\{\frac{n}{10^k}\right\} > \frac{n}{10^9}$ при всех $k = 1, 2, \ldots, 8$. Найдите количество забавных чисел.

8. Даны бесконечная арифметическая прогрессия A и бесконечная возрастающая геометрическая прогрессия G, состоящие из натуральных чисел. Известно, что в A лежат все члены G, кроме первого и еще некоторых 2016 членов. Докажите, что сумма этих 2016 членов прогрессии G делится на 7.

9. Внутри выпуклого многоугольника дана точка T. Сторону многоугольника назовём *хорошей*, если основание перпендикуляра из точки T на эту сторону находится строго внутри этой стороны. Вершину A назовём *хорошей*, если оба угла, на которые разбивает угол многоугольника при этой вершине луч AT, являются острыми. Докажите, что количество хороших сторон равно количеству хороших вершин.

9 класс **По мотивам Колма** 31 октября 2016

1. По законам страны Анчурии, телефонные номера всех абонентов должны состоять из 10 цифр (цифры могут быть от 0 до 9, причем нули могут стоять в том числе и в начале номера), а у любых двух абонентов номера должны различаться хотя бы в двух цифрах, либо ровно в одной цифре, но хотя бы на 2. Какое наибольшее количество телефонных номеров может быть в Анчурии?

2. На окружности отмечены четыре дуги: в 200°, 300°, 310° и 320°. Докажите, что на окружности есть точка, принадлежащая ровно трём отмеченным дугам.

3. Решите уравнение в простых числах: $p + p^2 + p^3 + p^4 = q!$.

4. Вписанная окружность ω равнобедренного треугольника ABC касается его равных сторон AB, BC и основания AC в точках P, Q и R соответственно. Отрезки AQ и CP пересекают повторно окружность ω в точках K и L соответственно. Обозначим точки пересечения отрезков PR и QR с KL через X и Y. Продлим отрезок KL до пересечения со сторонами треугольника AB и BC в точках Z и T соответственно. Докажите, что $ZK = XY = LT$.

5. Какое наибольшее количество двухэлементных подмножеств множества натуральных чисел, не превосходящих 2016, можно выбрать таким образом, чтобы для любых двух выбранных подмножеств одно из них состояло из двух наименьших элементов их объединения?

6. В кружке n ребят, причём любые двое ребят либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у каждого из ребят ровно 30 врагов в этом же кружке, причём если A дружит с B, но враждует с C, то B и C враждуют. Найдите все возможные значения n.

7. Девятизначное число n называется *забавным*, если в нём есть все цифры от 1 до 9 и $\left\{\frac{n}{10^k}\right\} > \frac{n}{10^9}$ при всех $k = 1, 2, \ldots, 8$. Найдите количество забавных чисел.

8. Даны бесконечная арифметическая прогрессия A и бесконечная возрастающая геометрическая прогрессия G, состоящие из натуральных чисел. Известно, что в A лежат все члены G, кроме первого и еще некоторых 2016 членов. Докажите, что сумма этих 2016 членов прогрессии G делится на 7.

9. Внутри выпуклого многоугольника дана точка T. Сторону многоугольника назовём *хорошей*, если основание перпендикуляра из точки T на эту сторону находится строго внутри этой стороны. Вершину A назовём *хорошей*, если оба угла, на которые разбивает угол многоугольника при этой вершине луч AT, являются острыми. Докажите, что количество хороших сторон равно количеству хороших вершин.