9 класс	Композиция гомотетий	27 октября 2016

1. Докажите, что композиция двух гомотетий (их центры могут и не совпадать) с коэффициентами k_1 и k_2, где $k_1k_2 \neq 1$, является гомотетией. В какой точке находится её центр и чему равен её коэффициент? А что будет, если $k_1k_2 = 1$?

2. Теорема о трёх колпаках. Даны три попарно непересекающиеся окружности попарно различных радиусов. К каждым двух из них проведены две общие внешние касательные, которые пересекаются в некоторой точке. Докажите, что три полученные точки лежат на одной прямой.

3. Пусть I_A, I_B, I_C — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающиеся сторон BC, CA, AB соответственно. Пусть A_1 — точка пересечения I_BI_C и BC. Аналогично определим точки B_1 и C_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

4. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 касаются окружности ω в точках A_1 и A_2. Через точку M на ω проведены прямые MA_i, пересекающие ω_i в точках B_i. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, O_1O_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

5. Даны две неравные окружности ω_1 и ω_2. Окружность γ касается их внешним образом в точках A и B. Докажите, что прямая AB проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора γ.

6. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть H_a, H_b, H_c — точки, симметричные H относительно прямых B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 соответственно. Докажите, что прямые AH_a, BH_b, CH_c пересекаются в одной точке.

7. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K. Окружность S_1 проходит через точку K и касается прямых AB и AD (S_1 вторично пересекает диагональ AC на отрезке AK). Окружность S_2 проходит через точку K и касается прямых CB и CD (S_2 вторично пересекает диагональ AC на отрезке KC). Докажите, что при всех положениях точки K на диагонали AC прямые, соединяющие центры окружностей S_1 и S_2, будут параллельны между собой.

8. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, I' — центр вневписанной в угол C окружности; L и L' — точки, в которых сторона AB касается этих окружностей. Докажите, что прямые IL', LI' и высота CH треугольника ABC пересекаются в одной точке.

9. Из вершины A треугольника ABC проведён луч AM, лежащий внутри треугольника (M лежит на BC). Обозначим через γ_1, γ_2 вписанная и вневписанная окружности треугольника AMB соответственно (берётся окружность, касающаяся стороны MB). Аналогично для треугольника ACM определены окружности ω_1, ω_2. Докажите, что общая внешняя касательная к окружностям γ_1 и ω_1, отличная от BC, и общая внешняя касательная к окружностям γ_2 и ω_2, отличная от BC, пересекаются на прямой BC.

9 класс	Композиция гомотетий	27 октября 2016

1. Докажите, что композиция двух гомотетий (их центры могут и не совпадать) с коэффициентами k_1 и k_2, где $k_1k_2 \neq 1$, является гомотетией. В какой точке находится её центр и чему равен её коэффициент? А что будет, если $k_1k_2 = 1$?

2. Теорема о трёх колпаках. Даны три попарно непересекающиеся окружности попарно различных радиусов. К каждым двух из них проведены две общие внешние касательные, которые пересекаются в некоторой точке. Докажите, что три полученные точки лежат на одной прямой.

3. Пусть I_A, I_B, I_C — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающиеся сторон BC, CA, AB соответственно. Пусть A_1 — точка пересечения I_BI_C и BC. Аналогично определим точки B_1 и C_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

4. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 касаются окружности ω в точках A_1 и A_2. Через точку M на ω проведены прямые MA_i, пересекающие ω_i в точках B_i. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, O_1O_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

5. Даны две неравные окружности ω_1 и ω_2. Окружность γ касается их внешним образом в точках A и B. Докажите, что прямая AB проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора γ.

6. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть H_a, H_b, H_c — точки, симметричные H относительно прямых B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 соответственно. Докажите, что прямые AH_a, BH_b, CH_c пересекаются в одной точке.

7. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K. Окружность S_1 проходит через точку K и касается прямых AB и AD (S_1 вторично пересекает диагональ AC на отрезке AK). Окружность S_2 проходит через точку K и касается прямых CB и CD (S_2 вторично пересекает диагональ AC на отрезке KC). Докажите, что при всех положениях точки K на диагонали AC прямые, соединяющие центры окружностей S_1 и S_2, будут параллельны между собой.

8. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, I' — центр вневписанной в угол C окружности; L и L' — точки, в которых сторона AB касается этих окружностей. Докажите, что прямые IL', LI' и высота CH треугольника ABC пересекаются в одной точке.

9. Из вершины A треугольника ABC проведён луч AM, лежащий внутри треугольника (M лежит на BC). Обозначим через γ_1, γ_2 вписанная и вневписанная окружности треугольника AMB соответственно (берётся окружность, касающаяся стороны MB). Аналогично для треугольника ACM определены окружности ω_1, ω_2. Докажите, что общая внешняя касательная к окружностям γ_1 и ω_1, отличная от BC, и общая внешняя касательная к окружностям γ_2 и ω_2, отличная от BC, пересекаются на прямой BC.