9 класс | **Гомотетия** | 20 октября 2016

Определение. *Гомотетией* с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости, которое переводит каждую точку L в точку L' такую, что $\overrightarrow{OL'} = k \cdot \overrightarrow{OL}$.

1. На каждом из оснований AD и BC трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

2. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и взята произвольная точка P. Через точку A провели прямую l_a, параллельную прямой PA_1. Аналогично определяются прямые l_b и l_c. Докажите, что прямые l_a, l_b, l_c пересекаются в одной точке.

3. Обозначим точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной AC треугольника ABC через P и Q соответственно. Докажите, что прямая BQ проходит через точку, диаметрально противоположную точке P на вписанной окружности.

4. Лемма Архимеда. В окружности S проведена хорда AB. Окружность ω касается AB в точке Y и окружности S в точке X. Докажите, что XY пересекает дугу AB окружности S, не содержащую X, в её середине (т.е. XY — биссектриса угла AXB).

5. Точки A, B и C лежат на окружности ω. Найдите ГМТ пересечения медиан треугольников ABC, если **а)** точки A и B фиксированы, а C двигается по ω; **б)** A фиксирована, а B и C двигаются по ω; **в)** A, B и C двигаются по ω.

6. В треугольнике ABC медианы AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в точке M, высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H, а точка O — так вообще центр описанной окружности!

а) Окружность Эйлера. Докажите, что точки $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1$, а также середины отрезков AH, BH, CH лежат на одной окружности, радиус которой вдвое меньше радиуса описанной окружности треугольника ABC.

б) Прямая Эйлера. Докажите, что точки H, O, M и центр окружности Эйлера лежат на одной прямой и найдите отношения, в котором последние две точки делят отрезок OH.

7. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Точки A_2, B_2, C_2 — середины дуг BAC, ABC, ACB описанной окружности. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

8. В углы треугольника вписаны три окружности одинакового радиуса. Окружность ω касается их внешним образом. Докажите, что центр ω лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника.

9. Докажите, что любой выпуклый многоугольник M содержит два непересекающихся во внутренних точках многоугольника M_1 и M_2, подобных M с коэффициентом $1/2$.

9 класс | **Гомотетия** | 20 октября 2016

Определение. *Гомотетией* с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости, которое переводит каждую точку L в точку L' такую, что $\overrightarrow{OL'} = k \cdot \overrightarrow{OL}$.

1. На каждом из оснований AD и BC трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

2. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и взята произвольная точка P. Через точку A провели прямую l_a, параллельную прямой PA_1. Аналогично определяются прямые l_b и l_c. Докажите, что прямые l_a, l_b, l_c пересекаются в одной точке.

3. Обозначим точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной AC треугольника ABC через P и Q соответственно. Докажите, что прямая BQ проходит через точку, диаметрально противоположную точке P на вписанной окружности.

4. Лемма Архимеда. В окружности S проведена хорда AB. Окружность ω касается AB в точке Y и окружности S в точке X. Докажите, что XY пересекает дугу AB окружности S, не содержащую X, в её середине (т.е. XY — биссектриса угла AXB).

5. Точки A, B и C лежат на окружности ω. Найдите ГМТ пересечения медиан треугольников ABC, если **а)** точки A и B фиксированы, а C двигается по ω; **б)** A фиксирована, а B и C двигаются по ω; **в)** A, B и C двигаются по ω.

6. В треугольнике ABC медианы AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в точке M, высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H, а точка O — так вообще центр описанной окружности!

а) Окружность Эйлера. Докажите, что точки $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1$, а также середины отрезков AH, BH, CH лежат на одной окружности, радиус которой вдвое меньше радиуса описанной окружности треугольника ABC.

б) Прямая Эйлера. Докажите, что точки H, O, M и центр окружности Эйлера лежат на одной прямой и найдите отношения, в котором последние две точки делят отрезок OH.

7. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Точки A_2, B_2, C_2 — середины дуг BAC, ABC, ACB описанной окружности. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

8. В углы треугольника вписаны три окружности одинакового радиуса. Окружность ω касается их внешним образом. Докажите, что центр ω лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника.

9. Докажите, что любой выпуклый многоугольник M содержит два непересекающихся во внутренних точках многоугольника M_1 и M_2, подобных M с коэффициентом $1/2$.