9 класс | Многочлены | 17 октября 2016

1. При каких a и b уравнение $x^3 + ax + b = 0$ имеет три различных решения, составляющих арифметическую прогрессию?

2. В выражении $(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2)^{2016}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной x получился отрицательный коэффициент.

3. Даны приведённые многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ степени 2016. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1) = Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

4. Докажите, что при любых натуральных числах k, l, m многочлен $x^{3k+2} + x^{3l+1} + x^{3m}$ делится на $x^2 + x + 1$.

5. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

6. Пусть $P(x)$ – многочлен нечётной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

7. Олег с каждым приведённым квадратным трёхчленом делает следующее: рисует его график, ищет точки пересечения с осями координат и, если получит 3 точки, проводит через эти точки окружность. Докажите, что все такие окружности проходят через одну точку.

8. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени n с натуральными коэффициентами найдется такое целое число k, что числа $P(k)$, $P(k+1)$, … , $P(k+2016)$ — составные.

9. Существует ли многочлен с отрицательным коэффициентом, все натуральные степени (выше первой) которого имеют положительные коэффициенты?

9 класс | Многочлены | 17 октября 2016

1. При каких a и b уравнение $x^3 + ax + b = 0$ имеет три различных решения, составляющих арифметическую прогрессию?

2. В выражении $(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2)^{2016}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной x получился отрицательный коэффициент.

3. Даны приведённые многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ степени 2016. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1) = Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

4. Докажите, что при любых натуральных числах k, l, m многочлен $x^{3k+2} + x^{3l+1} + x^{3m}$ делится на $x^2 + x + 1$.

5. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

6. Пусть $P(x)$ – многочлен нечётной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

7. Олег с каждым приведённым квадратным трёхчленом делает следующее: рисует его график, ищет точки пересечения с осями координат и, если получит 3 точки, проводит через эти точки окружность. Докажите, что все такие окружности проходят через одну точку.

8. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени n с натуральными коэффициентами найдется такое целое число k, что числа $P(k)$, $P(k+1)$, … , $P(k+2016)$ — составные.

9. Существует ли многочлен с отрицательным коэффициентом, все натуральные степени (выше первой) которого имеют положительные коэффициенты?