9 класс | Зацикливание | 10 октября 2016

1. В стране 10 городов, некоторые из них соединены дорогой с односторонним движением, в каждый город ровно одна дорога входит и из каждого города ровно одна дорога выходит. В каждом городе находится по автомобилисту. Каждый день каждый автомобилист проезжает одну дорогу. Найдите наименьшее натуральное N такое, что ровно через N дней все автомобилисты будут в тех городах, из которых начинали движение, вне зависимости от того, как именно проложены дороги.

2. В тридесятом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что его маршрут зациклится.

3. Последовательность чисел $\{x_n\}$ такова, что $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ и $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$. Докажите, что если $x_1 \in \mathbb{Q}$, то она периодична, начиная с некоторого места.

4. Есть неограниченное число чёрных и белых кубиков. Нужно построить из них башню в форме параллелепипеда так, чтобы каждый чёрный кубик граничил с чётным числом белых, а каждый белый — с нечётным числом чёрных. При любом ли нижнем заданном слое кубиков такую башню конечной высоты можно построить?

5. Круг разделён на 2016 секторов, и в каждом написано натуральное число. В один из секторов ставится фишка. Каждым ходом прочитывается число в секторе где фишка, фишка сдвигается на это число секторов по часовой стрелке, и там, где она остановилась, число увеличивается на 1. Докажите, что рано или поздно все числа станут больше миллиона.

6. В каждой целой точке числовой оси расположена лампочка с кнопкой, при нажатии которой лампочка меняет состояние — загорается или гаснет. Вначале все лампочки погашены. Задано конечное непустое множество целых чисел — шаблон S. Его можно перемещать вдоль числовой оси как жёсткую фигуру и, приложив в любом месте, поменять состояние множества всех лампочек, закрытых шаблоном. Докажите, что при любом S за несколько операций можно добиться того, что будут гореть ровно две лампочки.

7. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). За один ход разрешается взять все шарики из любой коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одному шарику.

а) Докажите, что если на каждом следующем ходе шарики берут из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе, то в какой-то момент повторится начальное размещение шариков.

б) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков по коробочкам можно получить любое другое.

8. На проволоку в форме окружности насажено несколько разноцветных шариков. В некоторый момент шарики начинают двигаться с одинаковыми скоростями, но некоторые — по часовой стрелке, а некоторые — против. Сталкиваясь, шарики разлетаются с теми же скоростями в противоположные стороны. Докажите, что рано или поздно расположение шариков на окружности повторится с исходным.

9 класс | Зацикливание | 10 октября 2016

1. В стране 10 городов, некоторые из них соединены дорогой с односторонним движением, в каждый город ровно одна дорога входит и из каждого города ровно одна дорога выходит. В каждом городе находится по автомобилисту. Каждый день каждый автомобилист проезжает одну дорогу. Найдите наименьшее натуральное N такое, что ровно через N дней все автомобилисты будут в тех городах, из которых начинали движение, вне зависимости от того, как именно проложены дороги.

2. В тридесятом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что его маршрут зациклится.

3. Последовательность чисел $\{x_n\}$ такова, что $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ и $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$. Докажите, что если $x_1 \in \mathbb{Q}$, то она периодична, начиная с некоторого места.

4. Есть неограниченное число чёрных и белых кубиков. Нужно построить из них башню в форме параллелепипеда так, чтобы каждый чёрный кубик граничил с чётным числом белых, а каждый белый — с нечётным числом чёрных. При любом ли нижнем заданном слое кубиков такую башню конечной высоты можно построить?

5. Круг разделён на 2016 секторов, и в каждом написано натуральное число. В один из секторов ставится фишка. Каждым ходом прочитывается число в секторе где фишка, фишка сдвигается на это число секторов по часовой стрелке, и там, где она остановилась, число увеличивается на 1. Докажите, что рано или поздно все числа станут больше миллиона.

6. В каждой целой точке числовой оси расположена лампочка с кнопкой, при нажатии которой лампочка меняет состояние — загорается или гаснет. Вначале все лампочки погашены. Задано конечное непустое множество целых чисел — шаблон S. Его можно перемещать вдоль числовой оси как жёсткую фигуру и, приложив в любом месте, поменять состояние множества всех лампочек, закрытых шаблоном. Докажите, что при любом S за несколько операций можно добиться того, что будут гореть ровно две лампочки.

7. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). За один ход разрешается взять все шарики из любой коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одному шарику.

а) Докажите, что если на каждом следующем ходе шарики берут из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе, то в какой-то момент повторится начальное размещение шариков.

б) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков по коробочкам можно получить любое другое.

8. На проволоку в форме окружности насажено несколько разноцветных шариков. В некоторый момент шарики начинают двигаться с одинаковыми скоростями, но некоторые — по часовой стрелке, а некоторые — против. Сталкиваясь, шарики разлетаются с теми же скоростями в противоположные стороны. Докажите, что рано или поздно расположение шариков на окружности повторится с исходным.