9 класс | Теория чисел | 6 октября 2016

1. Даны натуральные числа a и b. Известно, что a^2+b^2 делится на ab. Докажите, что $a=b$.

2. Рассмотрим всевозможные наборы чисел из множества $1, 2, \ldots, N$, не содержащие двух соседних чисел. Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна $(N+1)!-1$.

3. Изначально на доске записаны числа m и n. Каждую минуту Саша записывает в тетрадку квадрат наименьшего из чисел на доске, после чего Даша ищет разность чисел на доске и записывает ее вместо наибольшего из них, пока в какой-то момент не выпишет 0. Чему равна сумма чисел у Саши в тетради?

4. В строго возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с третьего, равно сумме каких-то двух предшествующих. Докажите, что в этой последовательности бесконечно много составных чисел.

5. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b существуют такие натуральные числа c и d, что числа $an+c$ и $bn+d$ взаимно просты при всех натуральных n.

6. Назовём натуральное число *почтенным*, если сумма всех его делителей, включая 1, но не включая само число, на 1 меньше этого числа. Найдите все почтенные числа, некоторая точная степень которых также почтенна.

7. Для каких натуральных m найдутся различные натуральные a и b такие, что $(ma+b)(mb+a)$ – степень простого числа?

8. Для каких натуральных n число $(n-1)!+1$ является точной степенью n?

9 класс | Теория чисел | 6 октября 2016

1. Даны натуральные числа a и b. Известно, что a^2+b^2 делится на ab. Докажите, что $a=b$.

2. Рассмотрим всевозможные наборы чисел из множества $1, 2, \ldots, N$, не содержащие двух соседних чисел. Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна $(N+1)!-1$.

3. Изначально на доске записаны числа m и n. Каждую минуту Саша записывает в тетрадку квадрат наименьшего из чисел на доске, после чего Даша ищет разность чисел на доске и записывает ее вместо наибольшего из них, пока в какой-то момент не выпишет 0. Чему равна сумма чисел у Саши в тетради?

4. В строго возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с третьего, равно сумме каких-то двух предшествующих. Докажите, что в этой последовательности бесконечно много составных чисел.

5. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b существуют такие натуральные числа c и d, что числа $an+c$ и $bn+d$ взаимно просты при всех натуральных n.

6. Назовём натуральное число *почтенным*, если сумма всех его делителей, включая 1, но не включая само число, на 1 меньше этого числа. Найдите все почтенные числа, некоторая точная степень которых также почтенна.

7. Для каких натуральных m найдутся различные натуральные a и b такие, что $(ma+b)(mb+a)$ – степень простого числа?

8. Для каких натуральных n число $(n-1)!+1$ является точной степенью n?