9 класс | Теорема Турана | 3 октября 2016

1. Пусть в графе на $2n$ вершинах n^2+1 ребро. Докажите, что в нем есть:

(a) треугольник; **(b)** n треугольников.

Теорема 1 (Pal Turán, 1941)**.** *В графе на v вершинах, не содержащем полного подграфа на $n \geq 3$ вершинах, не может быть больше, чем*

$$\frac{(n-2)(v^2-r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}$$

ребер, где r — остаток от деления v на $n-1$.

Определение. Множество вершин графа, попарно не соединенных ребрами, будем называть *независимым подмножеством.* Размер максимального независимого подмножества вершин графа будем называть *числом независимости* графа.

Теорема 2. *В графе на v вершинах и с числом независимости α не может быть меньше, чем*

$$r\frac{m(m+1)}{2} + (\alpha - r)\frac{m(m-1)}{2}$$

ребер, где m — неполное частное, а r — остаток при делении v на α.

2. Докажите эквивалентность теорем 1 и 2 (выведите их друг из друга).

Определение. Свойство графов P называется *наследственным*, если для любого графа G, обладающего свойством P, любой подграф графа G также обладает этим свойством.

3. (Лемма о наследственном свойстве) Пусть $P(n)$ — максимальное количество ребер в графе, обладающем наследственным свойством P. Докажите, что

$$P(n) \leqslant \frac{n}{n-2}P(n-1).$$

4. При помощи леммы о наследственном свойстве докажите теорему 1

(a) для $n=3$; **(b)** для $n=4$ **(c)** для произвольного n.

Для какого графа оценка точна?

5. (a) Докажите, что в графе на n вершинах и с числом независимости α сумма степеней вершин в максимальном независимом подмножестве не меньше, чем $n-\alpha$.

(b) Используя соображения из предыдущего пункта, докажите теорему 2. Для какого графа оценка точна?

6. Докажите теорему 2 методом удаления вершин. Удалим из графа некоторую вершину V, все вершины, смежные с V, а также все ребра исходящие из удаленных вершин.

(a) Докажите, что такая операция уменьшает число независимости графа.

(b) Докажите, что можно добиться того, что при такой операции количество ребер уменьшится не менее, чем на $d(d+1)/2$, где d — степень выбранной вершины V.

(c) Используя утверждение предыдущего пункта, докажите теорему 2.

(d) Докажите, что существует единственный граф, на котором оценка числа ребер из теоремы 2 достигается.

7. В Академии Наук Швамбрании 100 ученых и некоторые пары учёных обсуждают друг с другом физику или химию, причем никакие трое ученых не обсуждают попарно одну и ту же науку. Каково наибольшее возможное число пар ученых, говорящих друг с другом о какой-нибудь из двух наук?

8. На плоскости отметили $7n$ точек, после чего соединили отрезком те пары точек, расстояние между которыми равно единице. Оказалось, что в любом наборе из $2n+1$ точки есть пара точек, соединных отрезком. Докажите, что было проведено не менее, чем

(a) $9n$; **(b)** $10n$; **(c*)** $11n$ отрезков.

9. (a) *Треугольником* назовем тройку вершин графа, попарно соединенных ребрами. Каково наибольшее возможное число треугольников в графе на n вершинах, не содержащем полного подграфа на четырех вершинах?

(b) Каково наибольшее возможное количество полных подграфов размера k в графе на n вершинах, не содержащем полного подграфа на $k+1$ вершине?