

1. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). На меньшей дуге AB описанной около него окружности взята точка D . На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно BC . Описанная окружность треугольника BDE пересекает сторону AB в точке F . Докажите, что прямые EF и BC параллельны.

2. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Луч O_2A пересекает первую окружность в точке C . Докажите, что точки O_1 , O_2 , B и C лежат на одной окружности.

3. Точка F – середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведён перпендикуляр AE . Найдите угол $\angle CEF$.

4. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность, причём $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$. Докажите, что $CD \parallel AF$.

5. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K . Оказалось, что точки B , D , а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Найдите угол $\angle ADC$.

6. В треугольнике ABC A_1 и B_1 – середины высот, опущенных из вершин A и B , M и S – середина AB и основание высоты из вершины C соответственно. Докажите, что точки A_1 , B_1 , M и S лежат на одной окружности.

7. Окружности ω и ω' пересекаются в точках A и B . Касательная к ω в точке A пересекает ω' в точке C ; касательная к ω' в точке A пересекает ω в точке D . Прямая CD пересекает ω и ω' в точках E и F соответственно. Перпендикуляр из точки E к прямой AC пересекает ω' в точке P ; перпендикуляр из точки F к прямой AD пересекает ω в точке Q . Оказалось, что точки A , P и Q лежат по одну сторону от прямой CD . Докажите, что точки A , P и Q лежат на одной прямой.

8. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P , причём точка A лежит между D и P . Точки I_1 и I_2 – центры вписанных окружностей треугольников PAB и PDC соответственно. Пусть O – центр описанной окружности треугольника PAB , H – ортоцентр треугольника PDC . Докажите, что описанные окружности треугольников AI_1B и DHC касаются тогда и только тогда, когда касаются описанные окружности треугольников AOB и DI_2C .

1. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). На меньшей дуге AB описанной около него окружности взята точка D . На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно BC . Описанная окружность треугольника BDE пересекает сторону AB в точке F . Докажите, что прямые EF и BC параллельны.

2. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Луч O_2A пересекает первую окружность в точке C . Докажите, что точки O_1 , O_2 , B и C лежат на одной окружности.

3. Точка F – середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведён перпендикуляр AE . Найдите угол $\angle CEF$.

4. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность, причём $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$. Докажите, что $CD \parallel AF$.

5. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K . Оказалось, что точки B , D , а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Найдите угол $\angle ADC$.

6. В треугольнике ABC A_1 и B_1 – середины высот, опущенных из вершин A и B , M и S – середина AB и основание высоты из вершины C соответственно. Докажите, что точки A_1 , B_1 , M и S лежат на одной окружности.

7. Окружности ω и ω' пересекаются в точках A и B . Касательная к ω в точке A пересекает ω' в точке C ; касательная к ω' в точке A пересекает ω в точке D . Прямая CD пересекает ω и ω' в точках E и F соответственно. Перпендикуляр из точки E к прямой AC пересекает ω' в точке P ; перпендикуляр из точки F к прямой AD пересекает ω в точке Q . Оказалось, что точки A , P и Q лежат по одну сторону от прямой CD . Докажите, что точки A , P и Q лежат на одной прямой.

8. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P , причём точка A лежит между D и P . Точки I_1 и I_2 – центры вписанных окружностей треугольников PAB и PDC соответственно. Пусть O – центр описанной окружности треугольника PAB , H – ортоцентр треугольника PDC . Докажите, что описанные окружности треугольников AI_1B и DHC касаются тогда и только тогда, когда касаются описанные окружности треугольников AOB и DI_2C .