9 класс

# Разнобой

15 сентября 2016

**1.** На доске записано несколько различных целых чисел, сумма которых равна нулю. Может ли произведение этих чисел равняться 2016?

**2.** Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки? (Цифру 0 ставить на первое место нельзя.)

**3.** В неравнобедренном треугольнике $ABC$ проведены биссектриса $BL$, высота $BH$ и медиана $BM$. Докажите, что прямая $BL$ является биссектрисой угла $MBH$ тогда и только тогда, когда $\angle ABC = 90^\circ$.

**4.** Правильный 2016-угольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Сколько остроугольных треугольников может оказаться в таком разбиении?

**5.** Для положительного $x$ докажите неравенство $9x^{10} + 2 \geqslant 2x^9 + 9x^8$.

**6.** В клетках таблицы $8 \times 8$ расставлены целые числа. Разрешается прибавлять по 1 ко всем числам любого квадрата $3 \times 3$ или $4 \times 4$. При любой ли начальной расстановке чисел с помощью таких операций можно сделать все числа чётными?

**7.** Точка $I$ — центр вписанной окружности треугольника $ABC$, касающейся стороны $AC$ в точке $K$. Точка $M$ — середина стороны $AC$. Докажите, что прямая $MI$ делит пополам отрезок $BK$.

**8.** Действительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1^2 + 2ax_1 + b^2 = x_2$, $x_2^2 + 2ax_2 + b^2 = x_3$, $\ldots$, $x_n^2 + 2ax_n + b^2 = x_1$, где $b \geqslant a \geqslant 0$. Докажите, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

**9.** Каждое натуральное число покрашено в красный или синий цвет, причём чисел каждого цвета бесконечно много. Докажите, что существует число, являющееся и суммой двух красных, и суммой двух синих.

9 класс

# Разнобой

15 сентября 2016

**1.** На доске записано несколько различных целых чисел, сумма которых равна нулю. Может ли произведение этих чисел равняться 2016?

**2.** Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки? (Цифру 0 ставить на первое место нельзя.)

**3.** В неравнобедренном треугольнике $ABC$ проведены биссектриса $BL$, высота $BH$ и медиана $BM$. Докажите, что прямая $BL$ является биссектрисой угла $MBH$ тогда и только тогда, когда $\angle ABC = 90^\circ$.

**4.** Правильный 2016-угольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Сколько остроугольных треугольников может оказаться в таком разбиении?

**5.** Для положительного $x$ докажите неравенство $9x^{10} + 2 \geqslant 2x^9 + 9x^8$.

**6.** В клетках таблицы $8 \times 8$ расставлены целые числа. Разрешается прибавлять по 1 ко всем числам любого квадрата $3 \times 3$ или $4 \times 4$. При любой ли начальной расстановке чисел с помощью таких операций можно сделать все числа чётными?

**7.** Точка $I$ — центр вписанной окружности треугольника $ABC$, касающейся стороны $AC$ в точке $K$. Точка $M$ — середина стороны $AC$. Докажите, что прямая $MI$ делит пополам отрезок $BK$.

**8.** Действительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1^2 + 2ax_1 + b^2 = x_2$, $x_2^2 + 2ax_2 + b^2 = x_3$, $\ldots$, $x_n^2 + 2ax_n + b^2 = x_1$, где $b \geqslant a \geqslant 0$. Докажите, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

**9.** Каждое натуральное число покрашено в красный или синий цвет, причём чисел каждого цвета бесконечно много. Докажите, что существует число, являющееся и суммой двух красных, и суммой двух синих.