9 класс **Разнобой** 12 сентября 2016

1. Последовательность определена условиями $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+na_n}$ при $n \geqslant 1$. Найдите a_{2016}.

2. Из доски 8×8 вырезали 4 угловые клетки. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга королей можно поставить на получившуюся доску?

3. В стране 100 дорог (каждая соединяет ровно 2 города) и из любых трёх дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

4. При каких натуральных n найдутся n последовательных натуральных чисел, сумма которых является точным квадратом?

5. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D, E и F так, что $DE = BE$, $FE = CE$. Докажите, что центр описанной около треугольника ADF окружности лежит на биссектрисе угла DEF.

6. Пусть $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Докажите, что при любых действительных α и β, сумма которых не равна 0, многочлен $\alpha f(x) + \beta g(x)$ имеет три различных действительных корня.

7. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки X и Y, Z и T, U и V соответственно. Оказалось, что четырёхугольники $XYZT$, $ZTVU$ и $XYVU$ — вписанные. Докажите, что шестиугольник $XYZTUV$ тоже вписанный.

8. Неугловая клетка доски 8×8 покрашена в чёрный цвет, а все остальные — в белый. За одну операцию разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки, лежащие на любой вертикали, горизонтали или диагонали (не обязательно главной). Можно ли за несколько таких операций сделать всю доску белой?

9 класс **Разнобой** 12 сентября 2016

1. Последовательность определена условиями $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+na_n}$ при $n \geqslant 1$. Найдите a_{2016}.

2. Из доски 8×8 вырезали 4 угловые клетки. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга королей можно поставить на получившуюся доску?

3. В стране 100 дорог (каждая соединяет ровно 2 города) и из любых трёх дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

4. При каких натуральных n найдутся n последовательных натуральных чисел, сумма которых является точным квадратом?

5. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D, E и F так, что $DE = BE$, $FE = CE$. Докажите, что центр описанной около треугольника ADF окружности лежит на биссектрисе угла DEF.

6. Пусть $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Докажите, что при любых действительных α и β, сумма которых не равна 0, многочлен $\alpha f(x) + \beta g(x)$ имеет три различных действительных корня.

7. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки X и Y, Z и T, U и V соответственно. Оказалось, что четырёхугольники $XYZT$, $ZTVU$ и $XYVU$ — вписанные. Докажите, что шестиугольник $XYZTUV$ тоже вписанный.

8. Неугловая клетка доски 8×8 покрашена в чёрный цвет, а все остальные — в белый. За одну операцию разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки, лежащие на любой вертикали, горизонтали или диагонали (не обязательно главной). Можно ли за несколько таких операций сделать всю доску белой?