Неразобранные задачи из 2017.

13-6. В таблице $n \times n$ закрасили в чёрный цвет k клеток. При каком наибольшем k все чёрные клетки можно гарантированно покрыть n строками и n столбцами?

13-7. Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса. При каком наибольшем k можно заведомо утверждать, что найдутся k яблок одинакового веса?

13-4. У Чебурашки есть набор из 36 камней массами 1 г, 2 г, ..., 36 г, а у Шапокляк есть суперклей, одной каплей которого можно склеить два камня в один (соответственно, можно склеить три камня двумя каплями и так далее). Шапокляк хочет склеить камни так, чтобы Чебурашка не смог из получившегося набора выбрать один или несколько камней общей массой 37 г. Какого наименьшего количества капель клея ей хватит, чтобы осуществить задуманное?

14-4. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

14-5. Для каждого натурального n обозначим через S_n сумму первых n простых чисел: $S_1 = 2, S_2 = 2 + 3 = 5, S_3 = 2 + 3 + 5 = 10, \dots$

Могут ли два подряд идущих члена последовательности (S_n) оказаться квадратами натуральных чисел?

14-7. Пусть p – простое число, $p > 2$. Докажите, что любой простой делитель числа $2^p - 1$ имеет вид $2kp + 1$.

14-9. Числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Докажите, что $(2 + a)(2 + b) \geqslant cd$

14-10. Докажите для положительных a, b, c, d неравенство $\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{abcd}$.

15-5. Рёбра графа покрашены в два цвета так, что не существует одноцветных нечётных циклов. Докажите, что вершины графа можно правильным образом покрасить в 4 цвета.

15-6. 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек либо из неё исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?

15-7. Тридцать три буквы русского алфавита кодируются последовательностями из нулей и единиц длины n.

а) При каком наименьшем n кодирование можно выбрать однозначным (т.е. разным буквам соответствуют разные коды)?

б) А хватит ли $n = 8$, если при передаче кода возможна ошибка в одном знаке?

15-8. В стране 16 городов. Можно ли установить между ними дорожное сообщение так, чтобы их каждого города выходило не более 5 дорог и между любыми двумя городами был путь из не более чем двух дорог?

15-9. В онлайн игре участвуют $C_{11}^5 = 462$ игроков. Персонаж каждого из них освоил 5 или 6 навыков из 11 возможных. Петин персонаж освоил 5 навыков, а Васин – 6. Докажите, что найдутся такие два персонажа A и B, что любой навык освоенный персонажем A, освоен и персонажем B.