

Серия 7. Многочлены. Начало. Количество корней.

(Деление с остатком.) Для любых многочленов $F(x)$ и $G(x) \neq 0$ существуют единственные многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ такие, что $F(x) = Q(x)G(x) + R(x)$ и степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $G(x)$.

(Теорема Безу.) Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x - a)$ равен $P(a)$.

1. а) Докажите, что деление с остатком единственно.
б) У многочленов $F(x)$ и $G(x)$ коэффициенты целые. Обязательно ли целыми будут коэффициенты у остатка и неполного частного?

2. а) Докажите теорему Безу.

б) Докажите, что если a_1, a_2, \dots, a_k — различные числа, и $P(a_i) = 0$ для всех $i \leq k$, то $P(x)$ делится на $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k)$.

3. Докажите, что у многочлена степени n не более n корней.

4. Дан многочлен $F(x)$ четвёртой степени. Докажите, что прямая пересекает его график не более, чем в четырёх точках.

5. Многочлены $F(x)$ и $G(x)$ таковы, что для любого a выполнено $F(a) = G(a)$, то все коэффициенты многочленов $F(x)$ и $G(x)$ равны.

6. Существует ли такой приведённый многочлен $F(x)$ степени 3, что $F(1000) = 1$, $F(1001) = 3$, $F(1002) = 17$, $F(1003) = 55$?

7. Многочлен $P(x)$ 10-ой степени таков, что $P(1) = P(-1)$, $P(2) = P(-2)$, \dots , $P(5) = P(-5)$.

а) Докажите, что для любого x выполнено $P(x) = P(-x)$

б) Докажите, что в $P(x)$ ненулевые коэффициенты только при чётных степенях.

8. Существует ли такой многочлен $P(x)$, что для любого x выполнено $P(x^2 - x + 1) = P(x^2 + x + 1)$?

9. Дан многочлен $f(x)$ степени 3. Назовём тройку различных чисел (a, b, c) циклической, если $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$.

а) Докажите, что не бывает 10 различных циклических троек. (Тройки (a, b, c) и (b, c, a) считаем одинаковыми.)

б) Докажите, что не бывает 4 различных циклических троек с одинаковой суммой.

Письменное домашнее задание.

1. Докажите, что график многочлена 10-ой степени не может пересекать окружность более чем в 20 точках.

Подсказка. Уравнение окружности имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

2. Многочлен $F(x)$ таков, что $F(3) = 1$, а $F(1) = 3$. А чему равен остаток многочлена $F(x)$ при делении на $(x - 1)(x - 3)$?

3. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k .