Серия 6. Формула включения-исключения.

Пусть A - некоторое множество, тогда $|A|$ обозначает количество элементов в A Пусть теперь $A_1, A_2, ..., A_n$ - некоторые множества. Обозначим

$$S = |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

$$S_2 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|$$

....

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} ... \cap A_{i_k}|$$

....

$$S_n = |A_1 \cap A_2 ... \cap A_n|$$

Тогда верна следующая формула (формула включения-исключения):
$S = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + ... + (-1)^n S_{n-1} + (-1)^{n+1} S_n$

1. Куб со стороной 10 разбит на 1000 кубиков с ребром 1. В каждом кубике записано число, при этом сумма чисел в каждом столбике из 10 кубиков (в любом из трёх направлений) равна 0. В одном из кубиков (обозначим его через А) записана единица. Через кубик А проходит три слоя, параллельных граням куба (толщина каждого слоя равна 1). Найдите сумму всех чисел в кубиках, не лежащих в этих слоях.

2. Докажите формулу включения-исключения. (Рассмотрите элемент, лежащий ровно в k множествах и посмотрите, сколько раз он посчитается в правой части).

3. Докажите формулу для функции Эйлера:
если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} ... p_s^{\alpha_s}$, то $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})...(1 - \frac{1}{p_s})$

4. Петя и еще 9 человек играют в такую игру: каждый бросает игральную кость (шестигранную). Игрок получает приз, если он выбросил число очков, которое не удалось выбросить никому больше.

а) Какова вероятность того, что Петя получит приз?

б) Какова вероятность того, что хоть кто-то получит приз?

Считается, что вероятности выпадения каждого количества очков одинаковы.

5. В классе 30 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на свое место?

6. а) Докажите, что для любого i верно
$S_i - S_{i+1} + S_{i+2} - ... + (-1)^{n-i} S_n \geq 0$

б) Докажите, что
$S \geq S_1 - S_2 + ... + (-1)^{m+1} S_m$ при чётном m и
$S \leq S_1 - S_2 + ... + (-1)^{m+1} S_m$ при нечётном m

7. Кафтан площадью 1 покрыт пятью заплатами площадью $\frac{1}{2}$ каждая.

а) Докажите, что найдутся две заплаты, пересечение которых имеет площадь не меньше, чем $\frac{3}{20}$

б) Докажите, что найдутся две заплаты, пересечение которых имеет площадь не меньше, чем $\frac{1}{5}$

в) Докажите, что найдутся три заплаты, пересечение которых имеет площадь не меньше, чем $\frac{1}{20}$

Письменное домашнее задание.

1. Сколько существует целых чисел от 1 до 1000000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвёртой степенью?

2. Доказать, что количество способов разложить m различных шаров по n различным ящикам так, чтобы ни один из них не оказался пустым, равно $\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}C_n^j j^m$

3. Шестеро друзей за год побывали в 35-ти походах. Известно, что каждый сходил в 10 походов, а любые двое одновременно были ровно в 5-ти походах. Докажите, что найдётся такая тройка друзей, которая была вместе в трёх походах.