

Кружок в "Хамовниках". 2016-2017 учебный год. 8 класс.
**Серия 5. Сравнения по модулю, начальное
представление о показателях.**

Зафиксируем взаимно простые числа a и n . Пусть d — наименьшее такое натуральное число, что $a^d - 1$ делится на n . Число d называется *показателем a по модулю n* .

0(Важно запомнить). Пусть d — показатель a по модулю n .

- а) Докажите, что числа $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{d-1}$ дают разные остатки при делении на n .
- б) Пусть $a^l \equiv 1 \pmod{n}$. Докажите, что $l \div d$.
- в) Докажите, что $a^s \equiv a^r \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $s \equiv r \pmod{d}$.
- г) Докажите, что показатель любого числа по модулю n (взаимно простого с n , конечно) делит $\varphi(n)$.

1. а) Найдите показатель числа 5 при делении на 19.

- б) Какие значения могут принимать показатели чисел по модулю 17?

2. Пусть $p = 3k + 2$ — простое число.

- а) Докажите, что сравнение $x^3 \equiv 1 \pmod{p}$ имеет единственное решение по модулю p .
- б) Докажите, что для любого остатка a по модулю p сравнение $x^3 \equiv a \pmod{p}$ имеет единственное решение по модулю p .

3. Числа a и b таковы, что $a^{17} - b^{17}$ делится на 101. Докажите, что $a - b$ делится на 101.

4.а) Пусть p — простое число и $p > 5$. Пусть n — такое натуральное число, что $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ делится на p . Докажите, что $p - 1 \div 5$.

- б) Докажите, что среди чисел вида $5k + 1$ бесконечно много простых.

5. Дано натуральное число n . Известно, что $3^{3^n-1} - 1 \div (3^n - 1)$. Докажите, что $3^n - 1 \div n$.

6. Докажите, что если $a > 1$, то n делит $\varphi(a^n - 1)$.

7. Найти все такие p и q , что $(7^p - 2^p)(7^q - 2^q)$ делится на pq .

Письменное домашнее задание

1. Даны натуральные числа m и n . Докажите, что $2^n - 1$ делится на $(2^m - 1)^2$ тогда и только тогда, когда n делится на $m(2^m - 1)$.

2. Докажите, что среди простых чисел бесконечно много дают остаток 3 при делении на 4.

3. а) Докажите, что любой нечётный простой делитель числа $a^{2^k} + 1$ имеет вид $2^{k+1}x + 1$.

- б) Докажите, что простых чисел вида $2^{k+1}x + 1$ бесконечно много.