Серия 3. Процессы и полуинварианты.

1. В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города A в самый удаленный от него город B, оттуда — в самый удаленный от него город C, и т. д. Докажите, что если C не совпадает с A, то путешественник никогда не вернется в A

2. На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр «01» заменять на набор цифр «1000». Может ли такой процесс замен продолжаться бесконечно или когда-нибудь он обязательно прекратится?

3. Круг разделён на 6 секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

4. В парламенте у каждого не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в его палате будет не более одного врага.

5. В таблице n х $n(n > 2)$ изначально в чёрный цвет покрашена одна клетка, соседняя по стороне с угловой, остальные — в белый. За операцию разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки любого столбца или все клетки любой строки. Можно ли такими операциями закрасить всю доску чёрным,

а) если n — чётное;

б) если n — нечётное;

в) если $n = 4$ и разрешается перекрашивать клетки любой диагонали в противоположный цвет (не обязательно главной)?

6. Несколько стеклянных шариков разложено в три кучки. Мальчик, располагающий неограниченным запасом шариков, может за один ход взять по одному шарику из каждой кучки или же добавить из своего запаса в одну из кучек столько шариков, сколько в ней уже есть. Доказать, что за несколько ходов мальчик может добиться того, что в каждой кучке не останется ни одного шарика.

7. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встре- чаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т. п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

8. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если "пачка"состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.

9. За круглым столом сидят десять человек, перед каждым – несколько орехов. Всего орехов – сто. По общему сигналу каждый передаёт часть своих орехов соседу справа: половину, если у него (у того, кто передаёт) было чётное число, или один орех плюс половину остатка - если нечётное число. Такая операция проделывается второй раз, затем третий и так далее, до бесконечности. Докажите, что через некоторое время у всех станет по десять орехов.

10. Дано натуральное число, большее 4. За ход разрешается представить его в виде суммы нескольких неединичных натуральных слагаемых и заменить на их произведение. Докажите, что не более чем за 4 хода можно получить факториал какого-нибудь натурального числа.