Кружок в "Хамовниках". 2016-2017 учебный год. 8 класс.

Серия 27. Ещё один разнобой

1. Пусть x и y — неотрицательные числа, сумма которых не превосходит 1. Докажите, что $x^2 + 8x^2y^2 + y^2 \leq 1$

2. Найдите наименьшее натуральное число, дающее попарно различные остатки при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

3. В ряд записаны несколько различных натуральных чисел. Назовем пару рядом стоящих чисел плохой, если их сумма кратна 7 и левое больше правого, либо их сумма не кратна 7 и левое меньше правого. Каждую минуту числа какой-нибудь из плохих пар меняются местами. Докажите, что рано или поздно такие перестановки прекратятся

4. По кругу лежит 17 одинаковых на вид монет, из которых две лежащие рядом — фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, и обе фальшивые монеты весят одинаково и при этом легче настоящих на 1 грамм. Имеются хлипкие весы — это чашечные весы, которые ломаются, если разность весов на чашах больше 1 грамма, однако, показывают при этом, какая чаша перевесила. Как за два взвешивания на хлипких весах без гирь найти обе фальшивые монеты?

5. Найдите все такие натуральные m, что $\{\sqrt{m}\} = \{\sqrt{(m + 2011)}\}$.
(Здесь {} - это дробная часть: $\{x\} = x - [x]$)

6. В вершинах выпуклого многогранника с n вершинами записано по два положительных числа: синее и красное, причем сумма синих равна сумме красных. За один ход можно изменить два синих числа в концах любого одного ребра так, чтобы чтобы они остались положительными и сумма сохранилась. Докажите, что не более чем за $n - 1$ ход можно добиться, чтобы в каждой вершине синее число стало равно красному.

7. В ряд стоит 1111 блюдец, на них лежат 1, 2, 3, . . . , 555, 556, 555, 554, . . . , 2, 1 орехов. За ход разрешается переложить любое число (не меньше одного) орехов с любого блюдца на соседнее слева или съесть любое число орехов из самого левого блюдца. Петя и Вася делают ходы по очереди, начинает Петя. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто из них может выиграть, как бы не играл соперник?

8. Секретный объект представляет собой в плане квадрат 40×40м, разбитый коридорами на квадратики 5×5м. В каждой вершине такого квадратика — выключатель. Щелчок выключателя действует сразу на все выходящие из этой вершины пятиметровые коридоры, меняя их освещенности на противоположные. Сторож находится в углу полностью неосвещенного объекта. Он может ходить только по освещенным коридорам и щелкать выключателями любое число раз. Может ли он добиться того, чтобы от любого выключателя к любому другому он мог пройти, не щелкая выключателями?