Серия 26. Разнобой.

1. Для произвольных действительных чисел $x_1, x_2, \ldots x_n$ и $y_1, y_2, \ldots y_n$ докажите неравенство

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2} \geqslant \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \ldots (x_n + y_n)^2}.$$

2. Докажите, что $n!$ не делится на 2^n.

3. Сумма n положительных чисел равна 1. Какое наибольшее значение может принимать:
а) их сумма попарных произведений;
б) сумма различных произведений по 3?

4. Два игрока по очереди проводят диагонали в правильном $(2n+1)$-угольнике $(n > 1)$. Разрешается проводить диагональ, если она пересекается (по внутренним точкам) с четным числом ранее проведенных диагоналей (и не была проведена раньше). Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре?

5. Детектив Ниро Вульф расследует преступление. В деле замешаны 80 человек, среди которых один — преступник, ещё один — свидетель преступления (но неизвестно, кто это). Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 80 человек, и если среди приглашённых есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. а) Может ли детектив заведомо раскрыть дело за 12 дней?
б*) За какое наименьшее количество дней можно раскрыть преступление?

6. Двое по очереди отмечают узлы таблицы 10×10. При этом если какие-то три отмеченных узла лежат на одной прямой, то эта прямая обязательно является главной диагональю, идущей из левого нижнего угла в правый верхний. Проигрывает тот, кто не может сделать ход по правилам. Кто выигрывает при правильной игре?

Сдаём письменно

1. Два игрока по очереди красят точки на плоскости: первый красит одну в красный цвет, а второй — 2017 точек в синий. Нельзя красить уже покрашенную точку. Цель первого игрока покрасить в красный цвет вершины некоторого правильного треугольника. Сможет ли второй игрок ему помешать?