Серия 21. Теория чисел. Задачи с текстовым условием.

1. Натуральные числа от 1 до 2014 выписаны по кругу в некотором порядке. Отличница Маша вычислила наибольшие общие делители у всех пар стоящих рядом чисел и заявила, что среди полученных НОДов ровно 1007 четных. Докажите, что она ошиблась.

2. Пусть $a_1, \ldots, a_{10}$ — различные натуральные числа, не меньшие 3, сумма которых равна 678. Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 20 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{10}$ равняться 2012?

3. Дано 57 различных натуральных чисел, меньших 2017. Известно, что среди любых трех из них есть два, дающих в произведении точный квадрат. Докажите, что среди этих чисел есть точный квадрат.

4. На доске написано 2^{1000} натуральных чисел, не превосходящих 2016. Докажите, что произведение некоторых подряд идущих из них является полным квадратом.

5. Дано натуральное число N. На доске написаны числа от N^3 до $N^3 + N$. Среди них a чисел покрасили в красный цвет, а какие-то b из остальных — в синий. Оказалось, что, что сумма красных чисел делится на сумму синих. Докажите, что a делится на b.

6. Найдите наибольшее натуральное n, которое при делении на любой точный квадрат, лежащий в промежутке от 2 до $\frac{n}{2}$, дает нечётный остаток.

Сдаём письменно.

1. По кругу записывают 2015 натуральных чисел так, чтобы каждые два соседних числа различались на их наибольший общий делитель. Найдите наибольшее натуральное N, на которое гарантированно будет делиться произведение этих 2015 чисел.

2. Гриша вычислил произведение всех чисел, не превосходящих миллиона и не кратных 29, и сократил его на максимальную возможную степень числа 31. Стас нашёл произведение всех чисел, не превосходящих миллиона и не кратных 31, и сократил его на максимальную возможную степень числа 29. Чей результат больше?