Серия 1. О разбиении на пары.

Будем называть множество из k юношей *перспективным*, если суммарно эти юноши знают хотя бы k девушек, а *критическим* — если они знают ровно k девушек.

Лемма Холла гласит, что *всех юношей можно женить на знакомых им девушках тогда и только тогда, когда любое множество юношей является перспективным.*

1. а) Предположим, что любое множество юношей является перспективным. Рассмотрим наименьшее критическое множество юношей (если оно есть). Докажите, что можно поженить любого юношу из наименьшего критического множества на любой его знакомой, и все множества останутся перспективными.
б) Выведите отсюда лемму Холла.

2. Предположим, что любое множество юношей является перспективным. Предположим, что нельзя женить всех одновременно. Тогда рассмотрим наибольшее количество пар, которое можно образовать. Рассмотрим юношу, не вошедшего в эти пары. Он начинает организовывать своё тайное общество. В первый день в этом обществе только он. Каждый следующий день каждый юноша, входящий в это общество приглашает туда всех знакомых с ним девушек, а они приводят туда своих мужей (если таковые есть).
а) Докажите, что рано или поздно в общество придёт девушка, которая в первоначальное разделение на пары не входила.
б) Докажите, что в таком случае можно пережненить людей так, чтобы количество пар увеличилось.
в) Докажите лемму Холла.

3. В частном охранном предприятии работает n охранников. Ежедневно им нужно распределяться по n объектам. По прошествии k дней оказалось, что никто дважды на одном объекте не дежурил. Докажите, что можно составить расписание на оставшиеся $n-k$ дней так, чтобы все охранники подежурили по одному разу на всех объектах.

4. В 2016-элементном множестве выбрали несколько 1003-элементных множеств. Докажите, что можно добавить к каждому из них по одному элементу, чтобы получившиеся 1004-элементные множества тоже были различны.

5. Каждый из двух равновеликих квадратов разбит на 100 равновеликих частей. Докажите, что можно сложить эти квадраты в стопку и проткнуть в 100 точках так, чтобы каждая из 100 частей каждого из квадратов была проткнута.

6. (Лемма Холла для арабских стран.) Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они могут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.

Паросочетания с предпочтениями.

Есть N юношей и N девушек. Они обладают следующими особенностями:

1) Каждый человек оценивает лишь людей противоположного пола. 2) Каждый юноша может отсортировать девушек от “наименее привлекательной” к “наиболее привлекательной”, причем его предпочтения не меняются (взгляды разных юношей могут различаться). 3) Каждая девушка может отсортировать юношей от “наименее привлекательного” к “наиболее привлекательному”, причем её предпочтения не меняются (взгляды разных девушек могут различаться).

Рассмотрим некоторое разбиение людей на пары вида МЖ (паросочетание). Назовём паросочетанием *неустойчивым*, если найдутся две такие пары $A-b$ и $B-a$ (юноши обозначены большими буквами, а девушка маленькими), что для A девушка a привлекательнее, чем b, а для a юноша A привлекательнее, чем B.
Будем называть паросочетание *устойчивым* в другом случае.

Агоритм Гейла-Шепли

1) Юноши делают предложение наиболее предпочитаемой девушке; 2) каждая девушка из всех поступивших предложений выбирает наилучшее и отвечает на него “может быть” (помолвка), на все остальные отвечает “нет” (отказ) 3) юноши, получившие отказ, обращаются к следующей девушки из своего списка предпочтений, юноши, получившие ответ “может быть”, ничего не делают; 4) если девушке пришло предложение лучше предыдущего, то она прежнему претенденту (которому ранее сказала “может быть”) говорит “нет”, а новому претенденту говорит “может быть”; 5) шаги 1-4 повторяются, пока у всех юношей не исчерпается список предложений, в этот момент девушки отвечают “да” на те предложения “может быть”, которые у них есть в настоящий момент.

7. Докажите, что алгоритм Гейла-Шепли останавливается на устойчивом паросочетании.

8. Обязательно ли устойчивое паросочетание только одно?

9. Предположим, что юноша A после алгоритма Гейла-Шепли оказался в паре с девушкой a. Пусть в другом устойчивом паросочетании A оказался в паре с $b \neq a$, а a в паре с $B \neq A$.
а) Докажите, что для A девушка a предпочтительнее, чем b.
б) Докажите, что для a юноша B предпочтительнее, чем A.