

Графы. Красим.

Назовём раскраску вершин графа в несколько цветов *правильной*, если вершины, соединённые ребром, покрашены в разные цвета.

1. Степень каждой вершины графа равна 3. Докажите, что его вершины можно правильным образом покрасить в 4 цвета.

2. В связном графе с 2017 вершинами степень каждой вершины не более 19. Докажите, что вершины можно правильно покрасить в 19 цветов.

Назовём граф, вершины которого можно правильно покрасить в два цвета, *двудольным*.

3(разберём вскоре). Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нём нет циклов нечётной длины.

4. В стране n городов, некоторые из них были соединены дорогами. Министерство транспорта в течение одного дня может закрыть одну дорогу, у которой есть объезд, состоящий из нечётного числа дорог. Через некоторое время оказалось, что ни у какой дороги нет никакого объезда. Какое наибольшее число дорог могло быть в стране изначально?

5. Рёбра графа покрашены в два цвета так, что не существует одноцветных нечётных циклов. Докажите, что вершины графа можно правильным образом покрасить в 4 цвета.

Про кубы.

Важным примером двудольного графа является *бинарный n -мерный куб*, вершинами которого являются подмножества n -элементного множества, а две вершины соединены ребром, если соответствующие подмножества различаются по одному элементу. Вершинами можно считать и последовательности длины n из нулей и единиц.

6. 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек либо из неё исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?

7. Тридцать три буквы русского алфавита кодируются последовательностями из нулей и единиц длины n .

а) При каком наименьшем n кодирование можно выбрать однозначным (т.е. разным буквам соответствуют разные коды)?

б) А хватит ли $n = 8$, если при передаче кода возможна ошибка в одном знаке?

8. В стране 16 городов. Можно ли установить между ними дорожное сообщение так, чтобы их каждого города выходило не более 5 дорог и между любыми двумя городами был путь из не более чем двух дорог?

9. В онлайн игре участвуют $C_{11}^5 = 462$ игроков. Персонаж каждого из них освоил 5 или 6 навыков из 11 возможных. Петин персонаж освоил 5 навыков, а Васин – 6. Докажите, что найдутся такие два персонажа A и B , что любой навык освоенный персонажем A , освоен и персонажем B .

Письменное домашнее задание.

1. При каких n можно обойти все вершины n -мерного куба, закончив в противоположной вершине к той, с которой начали?

2. В парламенте каждый депутат недолюбливает не более трёх других (это не обязательно взаимное чувство). На какое наименьшее количество фракций гарантированно можно разбить парламент так, чтобы в каждой фракции не было неприязни никакого её участника к какому-то другому.