

Формула Пика.

Формула Пика. Вершины многоугольника (не обязательно выпуклого) расположены в узлах клетчатой бумаги с клетками размера 1×1 . Внутри его лежит n узлов, а на границе m узлов. Тогда площадь этого многоугольника равна $n + \frac{m}{2} - 1$.

1. Вычислите площадь многоугольника, изображенного на Рис. 1.

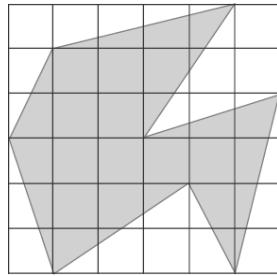


Рис. 1: к задаче 1.

2. Можно ли квадрат 50×50 разбить на 15 одинаковых многоугольников с вершинами в узлах сетки?

Учимся говорить.

1. Любой (не обязательно выпуклый) многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники.
2. Докажите формулу Пика.
3. Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей, которые проходил король, не имеет самопересечений.
 - а) Нарисуйте такую ломаную.
 - б) Какую площадь может ограничивать эта ломаная?
4. Середины сторон квадрата соединены отрезками с вершинами так, как это показано на Рис. 2. Найти отношение площади квадрата к площади восьмиугольника, образованного проведенными отрезками.

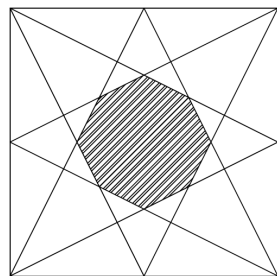


Рис. 2: к задаче 4.

5. При любом расположении на плоскости квадрата размером $n \times n$ он покрывает не более $(n + 1)^2$ узлов целочисленной решетки.
6. Докажите, что найдется прямая, проходящая через два узла клетчатой бумаги, и не лежащий на этой прямой узел, такой, что расстояние между ними меньше $\frac{1}{2000}$.

7. Все знают, что складывать дроби нужно так: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$. Однако, для решения этой задачи вам понадобится использовать операцию «сложение дробочника» — обозначим её плюсом в кружочке \oplus :

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Запустим следующий процесс. Изначально даны две дроби:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{1}.$$

Запишем между ними результат их «сложения дробочника»:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1}.$$

Теперь между каждыми двумя соседними дробями запишем их «сумму дробочника»:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1}.$$

Выпишем еще один шаг этого процесса. Ясно, что процесс можно продолжать и далее.

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{1}.$$

- а) Докажите, что для любых двух соседних дробей $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ в ряду, полученном на любом шаге процесса, выполнено $cb - ad = 1$.
- б) Докажите, что любая несократимая дробь, не превосходящая единицы, рано или поздно встретится после очередного шага нашего процесса.

Учимся писать.

1. Внутри некоторого треугольника с вершинами в целых точках лежит ровно две целых точки (возможно, какие-то еще лежат на его сторонах). Докажите, что прямая, проходящая через эти две точки, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.
2. Дан клетчатый квадрат 10×10 . Внутри него провели 80 единичных отрезков по линиям сетки, которые разбили квадрат на 20 многоугольников равной площади. Докажите, что все эти многоугольники равны.