# ТЧ-шные теоремы

**Малая теорема Ферма.** $a^{p-1} \equiv_p 1$, $p$ – простое.

**Функция Эйлера.** $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел от $1$ до $n$, взаимно простых с $n$.

**Теорема Эйлера.** $a^{\varphi(n)} \equiv_n 1$, $n$ – натурально и $a$ – целое, взаимно простое с $n$.

**Теорема Вильсона.** $(p-1)! \equiv_p -1$, $p$ – простое.

# Учимся говорить

**1.** $p>5$ – простое. Докажите, что число из $p-1$ единицы делится на $p$.

**2.** $n$ – нечетно. Докажите, что $2^{n!}-1$ делится на $n$.

**3.** $p$ – простое. Докажите, что $(2p-1)!-p$ делится на $p^2$.

**4.**

a) Найдте формулу для $\varphi(p^{\alpha})$, где $p$ - простое, $\alpha$ - натуральное.

b) Найдте формулу для $\varphi(n)$, если известно разложение $n$ на простые множители, а также степени вхождения простых множителей.

**5.** Сколькими способами можно покрасить карусель из $p$ вагончиков ($p$ – простое), если одинаковыми считаются раскраски, совмещающиеся поворотом? Выведите отсюда малую теорему Ферма.

**6.** Докажите, что при любом целом $a$
а) $a^5-a$ делится на 30;
б) $a^{17}-a$ делится на 510;
в) $a^{11}-a$ делится на 66;

**7.** Докажите что в любой арифметической прогрессии $a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd, \ldots,$ составленной из натуральных чисел, есть бесконечно много членов, в разложении которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.

**8.** С помощью индукции по $a$ докажите следующее утверждение, эквивалентное малой теореме Ферма: если $p$ – простое число, то для любого натурального $a$ справедливо сравнение $a^p \equiv_p a$.

**9.** Докажите, что ни при каком целом $k$ число $k^2+k+1$ не делится на 101.

# Учимся писать

**10.** Для каких натуральных $n$ $(n-1)!$ делится на $n$.

**11.** При каких натуральных $n$ для каждого натурального $k \geq n$ существет натуральное число с суммой цифр равной $k$, которое делится на $n$.