7 класс	Новогодний праздник	24 декабря 2016

1. В выпуклом 2016-угольнике провели несколько диагоналей, не пересекающихся внутри 2016-угольника. В результате 2016-угольник разделился на 2014 треугольников. Могло ли случиться, что ровно у половины этих треугольников все стороны являются диагоналями этого 2016-угольника?

2. Палиндром — это натуральное число, которое читается одинаково слева направо и справа налево (например, 1, 343, 2002 палиндромы, а 20117 — нет). Конечно или бесконечно число пар вида $(n, n+110)$, где оба числа — палиндромы?

3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. На отрезке AB отмечена точка M так, что углы MAD и AMO равны. Докажите, что $MD = MC$.

4. У Деда Мороза и Снегурочки есть по одному клетчатому квадрату 8×8. Они закрасили по одинаковому числу клеток на своих квадратах в синий цвет. Докажите, что удастся так разрезать эти квадраты на доминошки 1×2, что и из доминошек Дедушки Мороза, и из доминошек его внучки можно будет сложить квадрат 8×8 с одинаковой синей раскраской.

5. Существует ли такое n, что 2^n начинается на 5, а 5^n начинается на 2?

---

6. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько снежинок (возможно, по нескольку на каждой клетке). Разрешается выполнять следующие действия:
1) Снять по одной снежинке с клеток $n-1$ и n и положить одну снежинку в клетку $n+1$;
2) Снять две снежинки с клетки n и положить по одной снежинке в клетки $n+1$ и $n-2$.
Дед Мороз выполнил несколько таких операций и получил ситуацию, при которой он не мог больше выполнить ни одного действия. После этого Дед Мороз вернул исходную позицию, а его олени стали выполнять действия по-другому и снова пришли к ситуации, в которой ничего нельзя было изменить. Докажите, что у оленей и у Деда Мороза полученные ситуации одинаковы.

7. На квадратной решетке нарисован многоугольник M, так что все его вершины находятся в вершинах клеток и ни одна из его сторон не идёт по вертикали или горизонтали. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий сетки, заключённых внутри M, равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки внутри M.

8. Среди 100 ёлочных игрушек есть 4 фальшивых. Все настоящие игрушки весят одинаково, фальшивые — тоже, фальшивые игрушки легче настоящих. Как за два взвешиванияна чашечных весах без гирь найти хотя бы одну настоящую игрушку, чтобы украсить ею ёлку?