7 класс	Новогодний праздник	24 декабря 2016

1. В выпуклом 2016-угольнике провели несколько диагоналей, не пересекающихся внутри 2016-угольника. В результате 2016-угольник разделился на 2014 треугольников. Могло ли случиться, что ровно у половины этих треугольников все стороны являются диагоналями этого 2016-угольника?

Решение. Обозначим наш 2016-угольник через M. Каждая сторона M является стороной некоторого треугольника разбиения. При этом каждый треугольник разбиения содержит в качестве своих сторон не более двух сторон M. Значит, в разбиении есть не меньше $2016/2 = 1008$ треугольников, хотя бы одна из сторон которых принадлежит границе M. Отсюда все стороны являются диагоналями M не более, чем у $2014-1008 = 1006$ треугольников, что меньше, чем нужные 1008 треугольников.

2. Палиндром — это натуральное число, которое читается одинаково слева направо и справа налево (например, 1, 343, 2002 палиндромы, а 20117 — нет). Конечно или бесконечно число пар вида $(n, n+110)$, где оба числа — палиндромы?

Решение. Рассмотрим числа $1099\ldots9901$ и $1099\ldots9901+110$. Заметим, что

$$1099\ldots9901+110 = 1100\ldots0011,$$

поэтому второе число также является палиндромом. Отсюда указанные числа удовлетворяют условию, то есть нужных пар бесконечно много (так как количество девяток в первом числе может быть любым).

Замечание 1. В качестве первой и последней цифры числа n можно было взять любую цифру, отличную от 0, а в качестве второй и предпоследней — любую, отличную от 9.

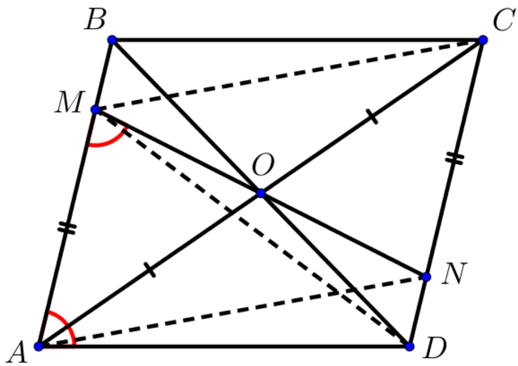
Замечание 2. Приведём соображение, которое позволяет придумать приведённый пример. Если в числе n хотя бы пять цифр, то все цифры, кроме, быть может, первых двух и последних двух, равны 9. Действительно, сложим n и 110 в столбик. Цифра в десятках у суммы будет отличаться от цифры в десятках у числа n. Значит, сумма не может начинаться с тех же двух цифр, что и n, иначе она не будет палиндромом. Поэтому в сотнях должен быть переход через разряд, и этот переход должен “дойти” до второго с начала разряда числа n. Это произойдёт только в том случае, если все цифры числа n от третьей с конца до третьей с начала являются девятками.

3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. На отрезке AB отмечена точка M так, что углы MAD и AMO равны. Докажите, что

$MD = MC$.

Решение 1. Продлим луч MO до пересечения со стороной CD в точке N. Заметим, что $AMNO$ — трапеция, у которой равны углы при основании AM, откуда трапеция равнобокая. Диагонали равнобокой трапеции равны, то есть $MD = AN$.

Теперь докажем, что $AN = MC$, откуда будет следовать утверждение задачи. $ABCD$ — параллелограмм, поэтому $AO = OC$, откуда треугольники AMO и CNO равны по стороне и двум углам. Но тогда $AM = CN$, и в четырехугольнике $AMCN$ две противоположные стороны равны и параллельны. Значит $AMCN$ — параллелограмм, откуда $AN = MC$, что и требовалось.



Замечание. Если убрать условие о том, что M лежит именно на стороне, а не на прямой, содержащей сторону, то утверждение задачи остаётся верным.

Решение 2. Отметим точку K — середину отрезка CD. Тогда $\angle OKD = \angle BCD = \angle MAD = \angle AMO$. Несложно проверить, что точки M и K симметричны относительно прямой, проходящей через O параллельно CD. Тогда $MK \perp D$. То есть в треугольнике MCD высота и медиана, проведённые из вершины M, совпадают, откуда $MC = MD$.

4. У Деда Мороза и Снегурочки есть по одному клетчатому квадрату 8×8. Они закрасили по одинаковому числу клеток на своих квадратах в синий цвет. Докажите, что удастся так разрезать эти квадраты на доминошки 1×2, что и из доминошек Дедушки Мороза, и из доминошек его внучки можно будет сложить квадрат 8×8 с одинаковой синей раскраской.

Решение. Докажем более сильное утверждение, чем требуется в условии: как бы дед Мороз и Снегурочка ни разрезали свои квадраты на доминошки, они всегда смогут составить квадраты с одинаковыми картинками.

Доминошки могут быть трех типов: белые, синие и двухцветные. Пусть Дед Мороз и Снегурочка отложат в сторону те доминошки, которые у них совпадают. После этого у них останется поровну синих клеток и поровну белых клеток. Совпадающих доминошек у них больше нет, поэтому у одного из них останутся только двухцветные доминошки, а у другого — только белые и синие. Без ограничения общности считаем, что у Деда Мороза остались только двухцветные. У Деда Мороза поровну синих и белых клеток, значит у Снегурочки — тоже. Тогда у Снегурочки четное число доминошек, значит, у Деда Мороза — тоже. Но из каждой пары двухцветных доминошек можно сложить такой же квадратик, что и из одной синей и одной белой. Такие квадратики вместе с отложенными доминошками дают одинаковые наборы деталей у Деда Мороза и Снегурочи, поэтому из них можно сложить квадраты с одинаковыми синими картинками.

5. Существует ли такое n, что 2^n начинается на 5, а 5^n начинается на 2?

Решение. Пусть в числе 5^n ровно $k+1$ цифра, а в числе 2^l ровно $l+1$ цифра. Тогда

$$5^n > 2 \cdot 10^k, \quad 2^n > 5 \cdot 10^l \quad \Rightarrow \quad 2^n \cdot 5^n = 10^n > 10^{k+l+1}.$$

Неравенства строгие, так как степень двойки и степень пятерки не могут оканчиваться на ноль. С другой стороны

$$5^n < 10^{k+1}, \quad 2^n < 10^{l+1} \quad \Rightarrow \quad 2^n \cdot 5^n = 10^n < 10^{k+l+2}.$$

То есть $10^{k+l+1} < 10^n < 10^{k+l+2}$, противоречие.

6. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько снежинок (возможно, по нескольку на каждой клетке). Разрешается выполнять следующие действия:
1) Снять по одной снежинке с клеток $n-1$ и n и положить одну снежинку в клетку $n+1$;
2) Снять две снежинки с клетки n и положить по одной снежинке в клетки $n+1$ и $n-2$.
Дед Мороз выполнил несколько таких операций и получил ситуацию, при которой он не мог больше выполнить ни одного действия. После этого Дед Мороз вернул исходную позицию, а его олени стали выполнять действия по-другому и снова пришли к ситуации, в которой ничего нельзя было изменить. Докажите, что у оленей и у Деда Мороза полученные ситуации одинаковы.

Решение. Перенесем, если надо, начало координат так, чтобы при всех ходах Деда Мороза и оленей все снежинки имели неотрицательные номера.

Будем говорить, что вес снежинки, находящейся на клетке с номером n, равен F_n — n-ому числу Фибоначчи. Тогда при выполнении разрешенных операций сумма весов всех снежинок не меняется, так как $F_{n-1}+F_n = F_{n+1}$, $2F_n = F_{n-2} + F_{n+1}$.

Допустим, что конечные позиции у Деда Мороза и оленей различны. Суммы весов всех снежинок в них одинаковы. Рассмотрим клетки, в которых эти две позиции различаются, и выберем среди них клетку с наибольшим номером k. Без ограничения общности, в клетке k лежит снежинка у Деда Мороза и не лежит у оленей. Из конечных позиций нельзя сделать ни одного хода, поэтому в конце в каждой клетке стоит не более одной снежинки, а среди любых двух соседних клеток есть хотя бы одна пустая. Другими словами, в любых двух соседних клетках лежит не более одной снежинки. Поэтому сумма весов снежинок, лежащих у оленей до клетки с номером k, не превосходит $F_{k-1} + F_{k-3} + \ldots + F_1$, если k четно, и $F_{k-1} + F_{k-3} + \ldots + F_0$, если k нечетно (поскольку снежинок с отрицательными координатами нет, сумма останавливается на F_1 или F_0).

Но $F_{k-1}+F_{k-3}+\cdots+F_1 = F_k-1 < F_k$ и $F_{k-1}+F_{k-3}+\cdots+F_0 = F_k-1 < F_k$ (привет письменной части листочка про числа Фибоначчи!). Получает, что сумма весов снежинок оленей меньше суммы весов снежинок Деда Мороза (ведь все снежинки с номерами, большими k, у них совпадают, а снежинка с координатой k у Деда Мороза имеет вес больше, чем все остальные снежинки оленей). Противоречие.

Замечание. Попробуйте доказать, что нельзя ходить бесконечно, то есть вне зависимости от начальной позиции и последовательности ходов возникнет позиция, при которой нет ни одного хода.

7. На квадратной решетке нарисован многоугольник M, так что все его вершины находятся в вершинах клеток и ни одна из его сторон не идёт по вертикали или горизонтали. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий сетки, заключённых внутри M, равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки внутри M.

Решение. Докажем, что каждая из рассматриваемых величин равна площади многоугольника M. Проверим это для суммы длин горизонтальных отрезков. Проведём эти отрезки. Многоугольник M разобьётся на несколько треугольников и несколько трапеций, причём высоты всех фигур будут равны 1. Выразим площади этих фигур через основания и высоты по известной формуле и сложим. С одной стороны получим площадь M, а с другой — сумму, в которую каждый горизонтальный отрезок входит два раза с коэффициентом $1/2$ (так как каждый отрезок является стороной двух кусков разбиения и входит в площадь каждого из них с коэффициентом $1/2$). То есть каждый отрезок входит с коэффициентом единица, что и требовалось.

Идея другого решения. Можно доказать утверждение задачи для треугольников, напрямую посчитав сумму длин вертикальных отрезков и сумму длин горизонтальных через координаты его вершин. Из этого следует утверждение для любого многоугольника, так как многоугольник можно разбить на треугольники.

8. Среди 100 ёлочных игрушек есть 4 фальшивых. Все настоящие игрушки весят одинаково, фальшивые — тоже, фальшивые игрушки легче настоящих. Как за два взвешиванияна чашечных весах без гирь найти хотя бы одну настоящую игрушку, чтобы украсить ею ёлку?

Решение. Приведем один из возможных способов. Разделим 100 монет на две группы (№1 и №2) по 33 монеты и одну группу (№3) из 34 монет. Первым взвешиванием положим на чаши весом группы 1 и 2. Если одна из чаш оказалась тяжелее другой, то на ней — не более одной фальшивой монеты. Тогда вторым взвешиванием можно сравнить любые две монеты из этой группы друг с другом: если одна из них тяжелее, то она настоящая, а если обе одинаковы, то обе являются настоящими. Если же после первого взвешивания оказалось, что две группы из 33 монет весят поровну, то это означает, что фальшивые монеты распределились по трем группам одним из таких способов: (0,0,4), (1,1,2) или (2,2,0).

Второе взвешивание делаем так: добавим к одной из групп одну монету с другой чаши, а все остальные монеты с другой чаши снимем и заменим на 34 монеты из третьей группы. У этого взвешивания возможны три исхода.

- $1 + 33 < 34$. Это значит, что слева фальшивых монет больше, чем справа. Поэтому имеет место случай (2,2,0), т.е. все 34 монеты — настоящие.

- $1 + 33 = 34$. Это значит, что фальшивых слева и справа поровну. Поэтому имеет место случай (1,1,2), причем единственную фальшивую монету из второй кучки мы как раз переложили к первой кучке. Тогда все остальные 32 монеты из второй кучки — настоящие.

- $1+33 > 34$. Это значит, что имеет место либо случай (0,0,4), либо случай (1,1,2), в котором переложенная монета не является фальшивой. В обоих случаях переложенная монета — настоящая.