Решетки и их свойства.

На плоскости даны два семейства параллельных прямых, разбивающих плоскость на равные параллелограммы; множество L всех точек пересечения этих прямых называется *решеткой*, а сами точки — *узлами решетки*. Любой из этих параллелограммов называется *фундаментальным параллелограммом* или *параллелограммом, порождающим решетку*.

В некоторых задачах нам понадобится частный случай решетки — целочисленная решетка. Она образована двумя семействами параллельных прямых, удовлетворяющих двум свойствам: 1) прямые из разных семейств перпендикулярны друг другу; 2) расстояние между двумя прямыми из одного семейства равно 1.

Свойства решетки:

1. Прямая, проходящая через два узла решетки, содержит бесконечно много узлов решетки. При этом все расстояния между соседними узлами, лежащими на этой прямой, равны между собой.

2. Преобразование параллельного переноса плоскости, переводящего один узел решетки в другой её узел, переводит решетку саму в себя.

Треугольник с вершинами в узлах решетки называется *примитивным*, если кроме своих вершин он не имеет внутри себя и на своих сторонах других узлов решетки.

1. а) Найдите ещё три различных способа, которыми можно получить целочисленную решетку с помощью двух семейств параллельных прямых. б) Найдите такие два семейства параллельных прямых, не проходящих по линиям сетки, что с их помощью можно получить целочисленную решетку.

2. Постройте четыре не равных друг другу примитивных треугольника на целочисленной решетке.

3. Если три вершины параллелограмма являются узлами решетки, то и четвертая его вершина — тоже узел решетки.

4. Если параллелограмм с вершинами в узлах решетки не содержит других узлов на сторонах и внутри себя, то он эту решетку порождает.

5. Проведем через все вершины некоторого примитивного треугольника ABC линии сетки и рассмотрим прямоугольник, образуемый четырьмя из этих линий и содержащий данный треугольник ABC. Укажите все возможные случаи взаимного расположения треугольника ABC и построенного прямоугольника.

Учимся говорить.

1. На целочисленной решетке а) примитивный треугольник не может быть остроугольным; б) примитивный треугольник может быть прямоугольным, только если он равен треугольнику с координатами вершин (0,0), (0,1), (1,0).

2. Допустим, что вершины некоторого примитивного треугольника на произвольной решетке имеют на ней координаты $(0, s)$, (p, r), $(q, 0)$, причем $q > p$ и $s > r$. Докажите, что выполнено равенство $|qs - ps - qr| = 1$.

3. Докажите, что любой примитивный треугольник на целочисленной решетке имеет площадь $1/2$.

4. Докажите, что для любого числа M на произвольной решетке существует примитивный треугольник, все стороны которого больше числа M. (Число M может быть сколь угодно большим).

Три кузнечика в начальный момент времени сидят в трёх вершинах одной клетки, а затем начинают «играть в чехарду»: каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке. Назовем треугольник *достижимым*, если в его вершинах могут одновременно оказаться три кузнечика, которые в начале были в трёх вершинах одной клетки.

5. Из любого примитивного треугольника, не равного треугольнику с координатами вершин (0,0), (0,1), (1,0) можно одним прыжком получить треугольник, у которого наибольшая сторона меньше, чем наибольшая сторона исходного.

6. Вершины треугольника являются узлами произвольной решетки и на его сторонах нет других узлов решетки. Докажите, что если такой треугольник содержит внутри себя ровно один узел решетки, то этот узел является точкой пересечения медиан данного треугольника.

Учимся писать.

В задачах 1, 2 речь идёт об описанной в разделе ***Учимся говорить*** *игре 3-х кузнечиков «в чехарду», на произвольной решетке.*

1. Из примитивного треугольника при прыжке получается примитивный.

2. Площадь треугольника при прыжке не меняется.

3. Для любых двух узлов A и B, на отрезке между которыми нет других узлов, найдется узел C такой, что треугольник ABC — примитивный.