

Десерт за решёткой.

Учимся говорить.

1. На координатной плоскости дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$ с вершинами в целых точках. Диагонали этого пятиугольника пересекаются в точках P, Q, R, S, T . Докажите, что внутри или на границе пятиугольника $PQRST$ есть хотя бы одна целая точка.

2. Внутри треугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги содержится ровно один узел. Докажите, что площадь такого треугольника не превосходит $9/2$.

3. В трёх вершинах квадрата находятся три кузнечика. Они играют в чехарду, т. е. прыгают друг через друга, причем если кузнечик A прыгает через кузнечика B , то после прыжка он оказывается от B на том же расстоянии, что и до прыжка, и, естественно, на той же прямой. Может ли после нескольких прыжков один из кузнечиков попасть в четвёртую вершину?

4. Всё те же кузнечики сидят в трёх вершинах квадрата. Могут ли они через несколько прыжков попасть в вершины квадрата с большей стороной?

5. Существует ли прямоугольный треугольник с целыми сторонами, который может быть положен на клетчатую бумагу так, чтобы его вершины попали в узлы, и ни одна из сторон не совпадала с линиями бумаги?

Учимся писать.

1. Все вершины выпуклого пятиугольника являются узлами квадратной решетки, а его стороны — целые числа. Докажите, что периметр такого пятиугольника является чётным числом.