Графы. Занятие третье.

Обсуждение.

0. В угловых клетках доски 3×3 стоит по коню, 2 белых и 2 чёрных. Изначально одноцветные фигуры стоят на одной диагонали. Могло ли получится так, что после нескольких ходов они оказались в углах, но при этом на диагоналях стоят разноцветные кони.

Учимся говорить.

1. Из спичек сложена шахматная доска, каждая сторона клетки — спичка. Жука посадили в одну клетку. Через спичку он не ползает. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы жук мог проползти от любой клетки до любой другой?

2. Можно ли нарисовать 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

3. На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Так ходили, пока не прошли через все возможные позиции. Докажите, что какая-то позиция встретилась не менее двух раз.

4. Выписаны 1000 целых чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы отношение чисел одинакового цвета не было простым числом.

5. Есть n камней разного веса. За одно взвешивание на чашечных весах без гирь можно сравнить два камня. За какое наименьшее число взвешиваний можно наверняка найти самый лёгкий камень?

6. Даны 10 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Известно, что среди попарных сумм $a_i + a_j$ $(i \neq j)$ как минимум 37 целых. Докажите, что все числа $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{10}$ — целые.

7. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок, по 2 бусинки в каждую коробку.

a) Докажите, что можно выбрать по одной бусинке из каждой коробки так, что все выбранные будут разного цвета

b) Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки

8. В роте хотя бы 28 солдат. На каждый из 28 дней февраля сержант выбрал группу солдат для наряда на уборку снега, причем в разные дни в наряд отправляются различные группы солдат. Докажите, что он может выбрать одного солдата и добавить его во все группы, где его нет, так, чтобы все группы по-прежнему были различны.

Учимся писать.

1. На плоскости проведено n прямых. Каждая пересекается ровно с 55 другими. Найдите n. (Укажите все возможности.)

2. Дан клетчатый квадрат 20×20. M его клеток покрашены в черный цвет, остальные – в белый. Будем рассматривать четверки клеток, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. Если в какой-то момент три клетки из одной четверки окрашены в черный цвет, то через минуту и четвертая клетка окрашивается в черный. При каком наименьшем M может оказаться так, что весь квадрат через некоторое время станет черным?