

Графы. Занятие второе.

Учимся говорить.

Двудольный граф.

1. Между командами «СКА» и «ЦСКА» состоялся хоккейный матч. Каждый игрок «СКА» стукнулся лбом с пятью хоккеистами «ЦСКА», а каждый игрок «ЦСКА» стукнулся лбом с тремя игроками «СКА». Сколько хоккеистов могло быть на льду, если в команде не более 10 человек?
2. В государстве некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что не существует замкнутого маршрута с нечетным числом дорог. Докажите, что можно все города разбить на две группы так, чтобы дороги соединяли города из разных групп.
3. В концерте «Итальянцы в Кремле» участвовало n певцов, некоторые из Италии, а некоторые из России. Некоторые итальянские певцы один раз спели дуэтом с некоторыми российскими певцами. Найдите максимально возможное число спетых песен.
4. Встретились n учеников. Некоторые пары учеников пожали друг другу руки. Известно, что нет трех человек, среди которых каждый поздоровался за руку с каждым. Найдите максимально возможное число пар рукопожатий.
5. На клетчатой доске 9×9 отмечено 18 клеток так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

Обход ребер.

6. Можно ли нарисовать графы, изображенные на Рис. 1, не отрывая карандаша от бумаги? Можно ли при этом в конце вернуться в ту точку, с которой начали рисование?

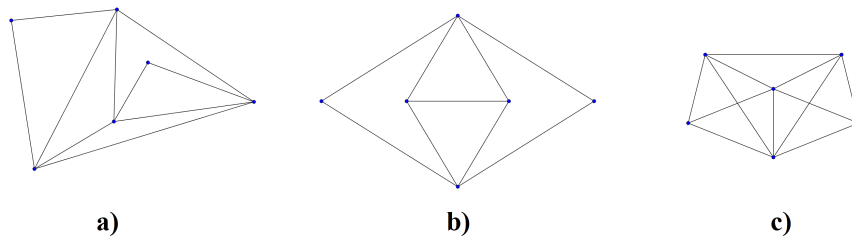


Рис. 1: к задаче 1.

7.
 - a) В государстве некоторые пары городов соединены дорогами. Путешественник смог проехать по замкнутому маршруту, проходящему через каждую дорогу ровно один раз. Докажите, что из каждого города выходит четное число дорог.
 - b) Докажите, что если из каждого города выходит четное число городов, то существует замкнутый маршрут, проходящий через каждую дорогу ровно один раз.
 - c) В каких случаях существует маршрут (не обязательно замкнутый), проходящий через каждую дорогу ровно один раз?
8. Света хочет составить из проволок
 - a) каркас куба
 - b) каркас додекаэдра (см. рис.2 b))

Какое наименьшее число проволок ей для этого потребуется? Проволоки можно сгибать и склеивать их концы. Куски проволок не должны налезать друг на друга.

Обход вершин

9. Можно ли, бродя по ребрам графов на Рис. 2, обойти все вершины ровно по одному разу? А можно ли обойти все вершины по одному разу и вернуться в исходную вершину?

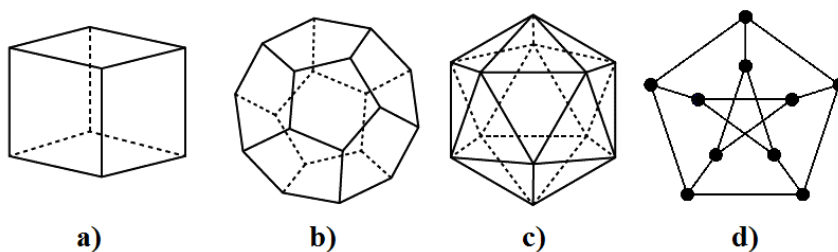


Рис. 2: к задаче 2.

10. а) В государстве N городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что каждый город соединен хотя бы с $(N - 1)/2$ другими. Докажите, что путешественник может, передвигаясь по дорогам, посетить все города ровно по одному разу.
- б) Пусть теперь каждый город соединен хотя бы с $N/2$ другими. Докажите, что путешественник может, передвигаясь по дорогам, посетить все города ровно по одному разу и вернуться в исходный город.

Учимся писать.

1. Город имеет форму квадрата 5×5 . Стороны квадратов разбиения — это улицы города. Какую наименьшую длину может иметь маршрут, если нужно пройти по каждой улице этого города и вернуться в исходное место? (По каждой улице можно проходить любое число раз.)
2. При каких n можно в вершинах n -угольника расставить натуральные числа так, чтобы на каждой стороне одно число делилось на другое, а для всех остальных пар чисел такого не было?