Диофантовы уравнения

Решите уравнения, если не предлагается иное. Решите в целых числах, если не указано иное.

Метод разложения на множители

1. $x^2 - y^2 = 2017$ в $\mathbb{N}$. **2.** $x^3 + x^2 + x + 3 = 0$. **3.** $x^2 + x = y^2$.

Метод остатков

4. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в $\mathbb{Z}$:
(a) $x^2+y^2 = 1234567$; **(b)** $x^2+y^2+z^2 = 7^{2017}$; **(c)** $a^2-3b^2 = 98765$;
(d) $2x^2 = y^2$.

5. $3^m + 7 = 2^n$. **6.** $1! + 2! + \ldots + n! = m^2$ в $\mathbb{N}$.

Разнобой

7. **(a)** $3^n = x^2 + y^2$; **(c)** $x^2 + y^2 = x + y + 2$;
(d) $x^6 = 56 + y^3$; **(e)** $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$;
(g) $2^x - 1 = 5^y$; **(h)** $15x^2 - 7y^2 = 9$; **(i)** $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$;
(j) $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$ в $\mathbb{N}$;

8. Докажите, что уравнения не имеют решений в целых числах:
(a) $19x^3-84y^2 = 1984$; **(b)** $n^3+2 = 9k$; **(c)** $x_1^4+\ldots+x_{14}^4 = 2016$.

9. **(a)** Докажите, что сумма квадратов десяти последовательных натуральных чисел не является квадратом.
(b) Найдите 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых является квадратом.

10. **(a)** Пусть p — простое число и $p > 5$. Докажите, что если разрешимо сравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv_p 0$, то $p \equiv_5 1$.
(b) Докажите, что простых чисел вида $5n + 1$ бесконечно много.
(c) Докажите, что простых чисел вида $6n + 1$ бесконечно много.

11. Сколько различных остатков может давать x^k по модулю p (p — простое).