

Эффект дежавю не является признаком психического расстройства, но зачастую бывает результатом простого совпадения места, времени суток и иных факторов, повторяющих происходившие в прошлом события.

1. Докажите, что сумма двух периодических числовых последовательностей – периодическая последовательность.
2. Может ли сумма двух последовательностей с предпериодами быть периодической без предпериода?
3.
 - a) Существует ли непериодическая последовательность из единиц и двоек?
 - b) Существует ли непериодическая последовательность из единиц и двоек, где нет трех одинаковых цифр подряд?
4. Пусть F_n – последовательность Фибоначчи ($F_1=F_2=1, F_{n+i}=F_n+F_{n-i}$).
 - a) Докажите, что последовательность последних цифр последовательности F_n периодична. Найдите период.
 - b) ***Периодическая ли последовательность цифр в последовательности Фибоначчи?

Учимся говорить

1. Пусть N и M являются периодами некоторой последовательности.
 - a) Докажите, что $N+M$ и $N-M$ также являются периодами этой последовательности.
 - b) Докажите, что $\text{НОД}(N,M)$ тоже является периодом этой последовательности.
2. Будет ли периодической следующая последовательность цифр 1234567891011...?
3. В алфавите людоедского племени 10 букв: А, Е, Ё, И, О, У, Ы, Э, Ю, Я. Людоедские шпионы обмениваются зашифрованными сообщениями. Алгоритм шифрования заменяет каждую из 10 людоедских букв на какую-то другую букву, причём разные заменяются на разные.
 - a) Докажите, что после нескольких применений этого алгоритма мы вернёмся к исходному тексту.
 - b) Мы не знаем правило замены, но у нас есть зашифрованный текст и программа, реализующая алгоритм шифрования. Программу можно запускать любое число раз. Какое наименьшее число раз нужно запустить эту программу, чтобы наверняка прочитать расшифрованное сообщение?
 - c) Слово АИУЭО после однократного применения алгоритма шифрования превратилось в ЁЭИОЯ. Может ли оно после еще нескольких применений этого же алгоритма превратиться в слово АУЮИЭ? Если может, то через сколько (укажите все варианты)?
4. Пусть F_n – последовательность Фибоначчи ($F_1=F_2=1, F_{n+i}=F_n+F_{n-i}$).
 - a) Докажите, что последовательность остатков, получаемых при делении чисел последовательности Фибоначчи на любое натуральное n , будет периодической.
 - b) Докажите, что последовательность остатков из пункта а) чисто периодическая (без предпериода).
5. Дана бесконечная последовательность, такая что, для каждого её члена существует такое число k , что все члены последовательности, начиная с этого члена, с шагом k равны. Обязательно ли такая последовательность периодична?
6. Рассмотрим последовательность, состоящую из символов “А” и “В”, определяемую следующим правилом: первые два символа “АВ”, а каждый следующий получается путем приписывания справа инвертированного (каждая буква “А” заменена на букву “В” и каждая буква “В” заменена на букву “А”) начального куска последовательности: АВВАВААВВААВВВА...
 - a) Докажите, что в последовательности нет трёх одинаковых букв подряд.
 - b) Является ли последовательность периодической?
7. Пусть $f_1='1'$ и $f_2='0'$. Определим $f_n=f_{n-1}f_{n-2}$. Получим: $f_1='1'$, $f_2='0'$, $f_3='01'$, $f_4='010'$, $f_5='01001'$, $f_6='01001010'$, $f_7='0100101001001'$ По такому алгоритму получим *бесконечное слово Фибоначчи*.
 - a) Есть ли в последовательности три одинаковые цифры подряд?
 - b) Является ли последовательность периодической?

Учимся писать

8. Периоды двух последовательностей – 7 и 13. Какова максимальная длина начального куска, который может у них совпадать?
9. Последовательность периодична с периодом 7. В ней оставлены только 1-й, 10-й, 100-й, 1000-й и т.д. члены. Докажите, что полученная последовательность – периодична.
10. Пусть F_n – последовательность Фибоначчи. Докажите, что в последовательности найдется число кратное 2016.