Паросочетания.

Учимся говорить.

1. В компании из нескольких юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Одна сваха сказала: «Я могу женить всех блондинов так, чтобы каждый женился на знакомой ему девушке!». Вторая сваха ей ответила: «А я могу отдать замуж всех брюнеток: каждая выйдеn замуж за знакомого ей юношу!» Докажите, что тогда можно сделать и то, и другое одновременно.

Определение. *Паросочетанием* в графе называется множество рёбер, не имеющих общих конечных вершин.

2. Докажите **Теорему Холла**: Двудольный граф G с долями A и B удовлетворяет следующему условию: если взять произвольное множество M вершин из доли A, найдется не менее $|M|$ вершин в доле B, смежных хотя бы с одной вершиной из M (где $|M|$ — это число вершин в M). Тогда в графе G есть такое паросочетание, что каждая вершина доли A является концом одного из его ребер.

Указание: возьмем паросочетание, при котором в A найдется вершина, не являющееся концом его ребра. Возьмите эту вершину и постройте паросочетание с большим числом ребер.

При решении следующих задач разрешается пользоваться теоремой Холла, в том числе если вам не удалось ее доказать.

3. В двудольном графе степени всех вершин равны k. Докажите, что ребра графа можно покрасить в k цветов так, чтобы два ребра одного цвета не имели общих концов.

Определение. *Вершинным покрытием* графа называется множество вершин, такое, что любая дуга графа имеет хотя бы одну конечную вершину из этого множества.

Определение. *Вершинное покрытие* называется *наименьшим*, если никакое другое вершинное покрытие не имеет меньшего числа вершин.

Определение. *Паросочетание* называется *наибольшим*, если никакое другое паросочетание не содержит большего числа рёбер.

Комментарий: конечно, минимальных покрытий может быть больше одного. Как и максимальных паросочетаний.

4. **Теорема Кёнига.** В двудольном графе число рёбер в наибольшем паросочетании равно числу вершин в наименьшем вершинном покрытии.

a) Докажите теорему Кёнига «в легкую сторону»: число рёбер в наибольшем паросочетании не больше числа вершин в наименьшем вершинном покрытии.

b) Первый способ доказательства «в сложную сторону». Выберите произвольное наименьшее вершинное покрытие. Докажите, что найдется паросочетание, число ребер в котором равно числу вершин в выбраном накрытии.

Указание: теорема Холла — прекрасный помощник при поиске паросочетаний!

c) * Второй способ доказательства «в сложную сторону». Выберите произвольное наибольшее паросочетание. Докажите, что найдется вершинное покрытие с числов вершин, равным числу ребер в выбранном паросочетании.

5. Докажите, что теорема Холла следует из теоремы Кёнига.