Разнобой.

Учимся говорить.

1. В стране 100 городов. Между любыми двумя городами либо ходят поезда, либо летают самолёты (ровно одно из двух). Докажите, что можно либо разобрать все поезда, либо все самолёты на металлолом, чтобы всё равно можно было бы пропутешествовать по всем городам страны.

2. Какое максимальное количество шахматных коней можно расставить на доске 7×7, так чтобы они не били друг друга?

3. **(Задача для письменного решения)** Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и P (радиусы окружностей различны). В точке A к окружности ω_1 проведена касательная, пересекающая (вторично) ω_2 в точке B. Через точку p проведена прямая, параллельная AB, пересекающая ω_2 в точке C и ω_1 в точке D. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

4. На столе лежат 100 одинаковых с виду монет, из которых 85 фальшивых и 15 настоящих. В вашем распоряжении есть чудо-тестер, в который можно положить две монеты и получить один из трёх результатов — «обе монеты настоящие», «обе монеты фальшивые» и «монеты разные». Можно ли за 64 таких теста найти все фальшивые монеты?

5. Натуральные числа m и n таковы, что $m^2 + n^2 + m \vdots mn$. Докажите, что m квадрат натурального числа.

6. Внутри квадрата $ABCD$ расположены точки P и Q так, что $\angle PAQ = \angle PCQ = 45°$. Докажите, что $PQ^2 = BP^2 + QD^2$.

7. В некоторых клетках квадрата 200×200 стоит по одной фишке — красной или синей; остальные клетки пусты. Одна фишка видит другую, если они находятся в одной строке или одном столбце. Известно, что каждая фишка видит ровно пять фишек другого цвета (и, возможно, некоторое количество фишек своего цвета). Найдите наибольшее возможное количество фишек, стоящих в клетках.

8. Дан 1001 прямоугольник с натуральными сторонами не больше 1000. Докажите, что можно выбрать три из них A, B и C такие, что C можно поместить в B, а B можно поместить в A.

9. $ABCD$ — такой выпуклый четырёхугольник, что $AB = BC + AD$. Пусть M — середина CD, а $\angle AMB = 90°$. Докажите, что $AD || BC$.

10. С левого берега реки на правый с помощью одной лодки переправились N туземцев, каждый раз плавая направо вдвоём, а обратно — в одиночку. Изначально каждый знал по одному анекдоту, каждый — свой. На берегах они анекдотов не рассказывали, но в лодке каждый рассказывал попутчику все известные ему на данный момент анекдоты. Для каждого натурального k найдите наименьшее возможное значение N, при котором могло случиться так, что в конце каждый туземец знал, кроме своего, ещё не менее чем k анекдотов.