Информация и алгоритмы — 3. Разбор письменного задания.

5. Имеются неограниченное число шляп n цветов. Каждому из n мудрецов надели шляпу. Каждый мудрец видит все надетые мудрецам шляпы кроме своей. Затем все одновременно выкрикивают один из n цветов, и если хотя бы кто-то угадал цвет своей шляпы — мудрецы побеждают. Могут ли мудрецы договиться так, чтобы гарантированно победить?

Решение. Пронумеруем все цвета шляп остатками по модулю n. Рассмотрим по модулю n сумму номеров всех шляп, надетых на мудрецов. Обозначим эту сумму через S. Если бы кто-то из мудрецов знал сумму S, то он бы смог восстановить свой цвет: ведь он знает все слагаемые в сумме, кроме своего.

Мудрецам надо действовать по такой стратегии. Пусть первый мудрец предположит, что $S \equiv_n 0$; второй предположит, что $S \equiv_n 1$; ... ; последний предположит, что $S \equiv_n n-1$. И пусть каждый назовёт свой цвет, исходя из своего предположения. У одного из мудрецов предположение верное, а значит, он угадает свой цвет.

Комментарий: при такой стратегии цвет всегда угадывает *ровно* один мудрец. Но на самом деле так будет при любой стратегии: если всегда угадывает хотя бы один, то всегда угадывает ровно один. А если цветов было 101, а мудрецов 100, то выигрышной стратегии не существует. Подумайте, как это доказать.