Информация и алгоритмы — 1. Разбор письменного задания.

8. В клетчатом квадрате $8{\times}8$ закрашено 25 клеток, образующих квадрат $5{\times}5$. Разрешается выбрать любую клетку квадрата $8{\times}8$ и спросить, закрашена ли она. За какое наименьшее число таких вопросов можно наверняка определить, какие клетки закрашены?

Ответ: за 4 вопроса.

Будем следить за положением верхней левой клетки квадрата 5×5. Всего есть 16 возможных вариантов расположения левой верхней клетки: эти положения образовывают квадрат 4×4 в левом верхнем углу квадрата 8×8. По этим положениям однозначно задаётся положение самого квадрата 5×5.

Оценка: на каждый наш вопрос есть два варианта ответа. Значит, после каждого нашего вопроса может оказаться так, что число возможностей упало не более, чем вдвое. Изначально возможностей $16 = 2^4 \Rightarrow$ необходимо хотя бы 4 вопроса.

Пример:

1) Спросим, закрашена ли клетка квадрата $8{\times}8$, стоящая во втором слева столбце и четвертой сверху строчке. Как в случае ответа "да", так и в случае ответа "нет", останется ровно 8 возможностей, и они будут образовывать прямоугольник 2×4

2) Возьмём в прямоугольнике 2×4 левую нижнюю клетку и спросим, закрашена ли она. В обоих случаях оставшиеся возможности будут образовывать прямоугольник 1×4.

3) В нём спросим про вторую сверху клетку. В обоих случаях останется доминошка 1×2.

4) Спросим про верхнюю клетку доминошки. О обоих случаях останется только одна возможность.

Мы определили положение квадрата 5×5 за 4 вопроса.

9. Есть 100 гирек различных весов. За одну операцию можно найти суммарный вес любых двух выбранных гирек. За какое минимальное число операций удастся узнать вес каждой из гирек?

Ответ: за 100 операций

Пример: возьмем три гири A, B, C. Пусть их массы равны a, b, c. Используя три операции, узнаем суммы $a + b; b + c; c + a$. Тереть мы знаем и сами числа a, b, c :

$$a = \frac{(a + b) + (a + c) - (b + c)}{2}$$

b и c находим аналогично.

Теперь мы можем за одну операцию узнать вес любой гири. Для этого надо спросить сумму ее веса с уже известным нам весом гири А. Значит, за 97 операций мы можем узнать веса всех 97 оставшихся гирь. Узнали все веса за 100 операций.

Оценка: Пусть мы несколькими операциями узнали все веса. Рассмотрим граф: вершины – гири, рёбрами соединяем те пары гирь, у которых мы узнавали сумму весов. Надо доказать, что в этом графе хотя бы 100 рёбер.

Пусть G — произвольная компонента связности. Докажем, что в G есть цикл. Допустим, что цикла нет, тогда G является деревом. Можно покрасить все вершины дерева G в белый и черный цвета правильным образом (то есть таким образом, что все ребра соединяют вершины разных цветов). Уменьшим веса всех белых вершин некоторую величину и одновременно увеличим веса всех черных вершин на эту же величину. Заметим, что набор весов на всех ребрах дает те же самые суммы, что и старый набор весов. Значит, известных нам сумм недостаточно для того, чтобы найти все веса. (Более того, мы не можем вычислить вес ни одной из гирь). Противоречие.

Итак, во всех компонентах связности есть цикл $\Rightarrow$ во всех компонентах ребер не меньше, чем вершин $\Rightarrow$ во всем графе ребер не меньше, чем вершин $\Rightarrow$ ребер хотя бы 100, что и требовалось.

Комментарий: Человек, хорошо знакомый с системами линейных уравнений, может доказать оценку проще. Можно обозначить веса камней переменными $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$. Тогда каждый вопрос даёт нам линейное уравнение вида $x_i + x_j = m$, где m – сумма весов двух гирь, которую нам назвали в ответ. Если мы задали менее 100 вопросов, то мы получаем систему линейных уравнений со 100 неизвестными и менее, чем 100 уравнениями. В такой системе, как известно, нельзя найти переменные однозначно: если существует хотя бы одно решение, то существуют и много других решений.

Но мы считаем, что веса гирь – это положительные числа. Поэтому нам нужно такое утверждение: если у такой системы есть положительное решение (то есть решение, для которого $x_1, x_2, \ldots, x_{100} > 0$), то существует бесконечно много других положительных решений.

Здесь мы доказательство не приводим.