ТЧ Добавка. Разбор письменного задания.

6. x^2+y^2-1 **делится на** $x+y-1$**. Доказать, что** $x+y-1$ **не является простым.**

Решение:

$x^2+y^2-1 \vdots x+y-1 \Rightarrow x^2+y^2-1-x(x+y-1) = y^2-xy+x-1 \vdots x+y-1.$

$y^2-xy+x-1 \vdots x+y-1 \Rightarrow y^2-xy-x-1-y(x+y-1) = -2xy+x+y-1 \vdots x+y-1.$

$-2xy+x+y-1 \vdots x+y-1 \Rightarrow 2xy-x-y+1+(x+y-1) = -2xy \vdots x+y-1.$

Допустим, что $x+y-1$ простое. $x>1$ и $y>1$ по условию $\Rightarrow x+y-1>2$. Поэтому из $2xy \vdots x+y-1$ следует $xy \vdots x+y-1$. Отсюда либо $x \vdots x+y-1$, либо $y \vdots x+y-1$. Но это невозможно, так как $0<x,y<x+y-1$. Противоречие. Значит, $x+y-1$ не является простым.

7. Решите уравнение $2^b-c^d=1$ **(**b,c,d **— натуральные).**

Решение:

$2^b-c^d=1 \Leftrightarrow 2^b=c^d+1.$

2^b чётно $\Rightarrow c^d$ нечетно $\Rightarrow c$ нечетно.

Рассмотрим два случая.

1) d четно. Тогда $c^d \equiv_4 1$. Значит, c^d+1 не делится на 4 $\Rightarrow$ 2^b не делится на 4 $\Rightarrow$ $b=1$.

2) d нечетно. Тогда $2^b=c^d+1=(c+1)M, M=(c^{d-1}-c^{d-2}+\cdots+1)$. Если c четно, то M нечетно. Если c нечетно, то M также нечетно, так как в сумме $c^{d-1}-c^{d-2}+\cdots+1$ нечетное число слагаемых. То есть M всегда нечетно. Но M не может иметь нечетных простых делителей, так как оно является делителем числа 2^b. Значит $M=1 \Rightarrow c^d+1=c+1 \Rightarrow c=1$ или $d=1$.

Таким образом, либо $b=1$, либо $c=1$ либо $d=1$. Если $b=1$, то $c=1$ и d- произвольное натуральное число. Если $c=1$, то $b=1$ и d - произвольное натуральное число. Если $d=1$, то b - произвольное натуральное число и $c=2^b-1$.

Проверка: $2^1-1^d=1$ - верно, $2^b-(2^b-1)^1=1$ - верно.

Ответ:

$b=c=1,\ d\in\mathbb{N};$

$d=1,\ b\in\mathbb{N},\ c=2^b-1.$