Диофантовы уравнения. Разбор письменного задания.

9. a) Докажите, что сумма квадратов десяти последовательных натуральных чисел не является квадратом.

Решение: Пусть существуют 10 подряд идущих натуральных чисел, сумма квадратов которых – квадрат. Пусть первое из этих чисел равно $a-4$. Тогда $S = (a-4)^2+(a-3)^2+\ldots+(a+4)^2+(a+5)^2$ – точный квадрат. Раскроем скобки: $S = 10a^2 + 10a + 85$; $S = 5 \cdot (2a^2 + 2a + 17)$. Видим, что S делится на 5.

Докажем, что $2a^2 + 2a + 17$ не делится на 5. Можно честно перебрать все остатки по модулю 5 и убедиться, что не делится ни в одном случае. Но можно поступить и так:

$2a^2 + 2a + 17 \equiv_5 2a^2 + 2a + 2$.

$2a^2 + 2a + 2 \equiv_5 0 \Leftrightarrow 4a^2 + 4a + 4 \equiv_5 0 \Leftrightarrow (2a + 1)^2 + 3 \equiv_5 0$ – это мы выделили полный квадрат. Последнее сравнение неверно ни про каком k, так как квадрат не может давать остаток 2 при делении на 5.

Итак, S делится на 5, но не делится на 25. Это дает противоречие, так как квадрат, делящийся на 5, делится и на 25.

b) Найдите 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых является квадратом.

Решение: Найдем такое a, что число $S = (a-5)^2 + (a-4)^2 + \ldots + (a+4)^2 + (a+5)^2$ является точным квадратом. $S = 11a^2+110 = 11\cdot(a^2+10)$. Нам надо, чтобы для какого-то натурального l выполнялось $a^2 + 10 = 11l^2$. Подберем нужное a. Заметим, что $a^2 \equiv_{11} 1 \Rightarrow a \equiv_{11} \pm 1$ (ведь 11 - простое). Это соображение значительно уменьшает число кандидатов. Теперь можно перебирать различные значения a, сравнимые с ± 1 по модулю 11. Пробуем $a = 10$, $a = 12$ $a = 21$, они не подходят. А вот $a = 23$ подходит: $23^2 + 10 = 539 = 11 \cdot 7^2$.

Итак, пример найден: $18^2 + 19^2 + ... + 28^2 = 77^2$.

Комментарии:

В этом решении мы показали, из каких соображений можно найти пример. Конечно, на олимпиаде для получения полного балла за такую задачу только лишь привести сам пример и доказать, что он работает.

Есть и другие примеры. Работает $a = 38$. Вообще существует бесконечно много решений уравнения $a^2 - 11l^2 = 10$ в целых числах.

Вопросы:

При каких целых k и m имеет решение в целых числах уравнение $x^2 - ky^2 = m$? Когда такое уравнение имеет бесконечно много решений? Можно ли как-то описать множество решений такого уравнения? Как решить хотя бы его частные случаи, называемые *уравнениями Пелля:* $x^2 - ky^2 = 1$? Ответы на эти вопросы мы научимся давать в будущем.

10. c) Докажите, что простых чисел вида $6n + 1$ бесконечно много.

Решение: Все простые числа вида $3k + 1$ нечетны. Поэтому если простое q имеет вид $3k + 1$, то k четно, $q = 6l + 1$. Поэтому нам достаточно доказать, что простых вида $3k + 1$ бесконечно много.

Лемма 1. *Пусть x – натуральное число. Тогда любой простой делитель числа x^2+x+1 либо равен 3, либо имеет вид $3k + 1$.*

Доказательство. Пусть $q \neq 3$- простое, и $x^2 + x + 1 \,\vdots\, q$. Тогда $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1 \,\vdots\, q$.

По малой теореме Ферма $x^{q-1} - 1 \,\vdots\, q$

Посмотрим на последовательность остатков по модулю q у чисел $x^0, x^1, x^2, \ldots$ Эта последовательность периодична без предпериода. Мы знаем, что $x^3 \equiv_q 1$ и $x^{q-1} \equiv_q 1$. Значит, период этой последовательности делит 3 и делит $q - 1$. Есть два варианта: период равен 3 и период равен 1.

Если он равен 3, то $q-1 \,\vdots\, 3$, что нам и требовалось. Если он равен 1, то $x^1 \equiv_q 1 \Rightarrow x^2+x+1 \equiv_q 3$. Но $x^2 + x + 1 \equiv_q 0 \Rightarrow 3 \equiv_q 0$. Противоречие, так как $q \neq 3$. □

Вернёмся к решению задачи. Допустим, что простых вида $3k + 1$ - конечное число. Обозначим их через $p_1, p_2, \ldots, p_t$ и рассмотри число $K = (3p_1p_2 \ldots p_t)^2 + 3p_1p_2 \ldots p_t + 1$. По лемме любой простой делитель K является либо тройкой, либо имеет вид $3k + 1$. Но K не делится на 3 и не делится на $p_1, p_2, \ldots, p_t$. Противоречие. Значит, простых вида $3k + 1$ бесконечно много.