ТЧ-шные теоремы. Разбор письменного задания.

10. Для каких натуральных n число $(n-1)!$ делится на n?

Ответ: при $n = 1$ и при всех составных n, больших 4.

Пусть $n = 1$. Тогда $(n-1)! = 0! = 1$, 1 делится на 1.

Пусть n простое. $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1)$, в этом произведении ни один из сомножителей не делится на p $\Rightarrow$ произведение не делится на n. (В случай простого n также можно применить теорему Вильсона. Но это, как говорится, из пушки по воробьям).

Пусть n составное и n не является квадратом простого числа. Тогда n представляется в виде $n = ab$, где a и b - различные натуральные числа, большие единицы. В произведении $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1)$ есть сомножитель, равный a и есть сомножитель, равный $b \Rightarrow$ произведение делится на pq.

Пусть $n = p^2$, p-простое. Если $p > 2$, то $2p < p^2 \Rightarrow$ в произведении есть сомножители p и $2p \Rightarrow$ произведение делится на p^2. Если $p = 2$, то $n = 4$, $(n-1)!$=6, 6 не делится на 4.

Все случаи разобраны.

11. При каких натуральных n для каждого натурального $k \geqslant n$ существет натуральное число с суммой цифр равной k, которое делится на n?

Пусть n делится на 3. Возьмем $k = n + 1$. Любое число с суммой цифр, равной $n + 1$, не делится на 3, так как $n + 1$ не делится на 3. Значит, любое такое число не делится на n.

Пусть $n > 1$ взаимно просто с 3. Предположим, что n также взаимно просто с 2 и 5. Возьмем натуральное $k \geq n$ и найдем натуральное число с суммой цифр k, делящееся на n. Рассмотрим число M, имеющее в своей десятичной записи единицы в k разрядах и нули во всех остальных разрядах. Такое число имеет вид $M = 10^{a_1} + 10^{a_2} + ... + 10^{a_k}$, где показатели степеней $a_1, a_2, ..., a_k$ - различные целые неотрицательные числа. Пусть среди показателей x штук делятся на $\varphi(n)$ и $k - x$ штук сравнимы с 1 по модулю $\varphi(n)$ $(0 \leq x \leq k)$

Число 10 взаимно просто с n. По малой теореме Ферма $10^{\varphi(n)} \equiv_n 1 \Rightarrow$ для любого натурального q верно $10^{q\varphi(n)} = (10^{\varphi(n)})^q \equiv_n 1$.

$10^{\varphi(n)} \equiv_n 1 \Rightarrow$ для любого натурального q верно $10 \cdot (10^{\varphi(n)})^q = 10^{q\varphi(n)+1} \equiv_n 10$.

Значит, среди слагаемых $10^{a_1}, 10^{a_2}, ..., 10^{a_k}$ есть x штук, сравнимых с 1 по модулю n, и остальные $k - x$ штук сравнимы с 10 по модулю n. Отсюда $M \equiv_n x + 10(k - x)$. Надо найти натуральное целое $0 \leq x \leq k$, такое что $x + 10(k-x) \equiv_n 0$, то есть $9x \equiv_n 10k$. n взаимно просто с 3, поэтому существует целое $0 \leq x \leq n - 1$, удовлетворяющее этому сравнению. По условию $k \geq n$, поэтому $0 \leq x \leq k$, что и требовалось.

Пусть теперь n взаимно просто с 3 и $n = t \cdot 2^\alpha \cdot 5^\beta$, где t взаимно просто с 2 и 5. Пусть дано $k \geq n$. Тогда $k \geq t$ и по уже разобранному случаю найдется натуральное Mс суммой цифр кратное t. Тогда $M \cdot 10^{\max(\alpha,\beta)}$ - это число с суммой цифр k, делящееся на n, что нам и требовалось.